Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux[1] septembre 1986

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan on considère un triangle (A, B, C) rectangle en A et tel que AB = a et AC = $2a$ (où a désigne un nombre réel strictement positif).
On appelle I le milieu de (A, C).

1. Soit J le barycentre des points A et C affectés respectivement des coefficients 3 et -1. Montrer que A est le milieu de (I, J).
2. Déterminer le point G barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, 2 et -1.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$3\text{A}M^2 + 2\text{B}M^2 - \text{C}M^2 = 6a^2.$$

On pourra remarquer que le point I est élément de cet ensemble.)

EXERCICE 2 **5 points**

On pose :

$$I_p = \int_1^{\text{e}} x^2 (\ln x)^p \,\text{d}x$$

où p est un entier naturel non nul.

1. **a.** Calculer I_1. (On pourra utiliser une intégration par parties.)
   b. Montrer que : pour tout entier p naturel non nul :

$$I_{p+1} = \frac{\text{e}^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p.$$

   c. En déduire I_2, puis I_3.
2. On considère la suite $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.
   a. Montrer que cette suite est décroissante.
   b. Établir la convergence de cette suite vers une limite que l'on ne cherchera pas à calculer.

PROBLÈME **11 points**

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions f_p définies sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f_p(x) = \frac{x^p}{p!}\text{e}^{-x},$$

où p désigne un entier naturel non nul et $f_0(x) = \text{e}^{-x}$.
Soit $\mathcal{C}_p$ la courbe représentative de la fonction f_p dans un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Caen, Clermont-Ferrand

1. Étude des variations de f_p (p entier naturel non nul fixé).

a. Calculer $f_p(0)$ et étudier la limite de $f_p(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Dériver f_p et établir l'égalité (1) $\quad f_p' = f_{p-1} - f_p$.

Calculer $f_p'(0)$.

c. Dresser le tableau de variations de f_p.

2. Étude des positions relatives des courbes $\mathscr{C}_p$ (p entier naturel non nul fixé).

On note A_p le point de $\mathscr{C}_p$ dont l'abscisse définit le maximum de f_p.

a. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_{p+1}$ et $\mathscr{C}_p$ et montrer que $\mathscr{C}_{p+1}$ et $\mathscr{C}_p$ se coupent en 0 et en A_{p+1}.

b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_{p+2}$ et $\mathscr{C}_p$ et montrer que $\mathscr{C}_{p+2}$ et $\mathscr{C}_p$ se coupent en O et en un point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[p+1\ ;\ p+2]$.

3. Tracés des courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Utiliser les questions précédentes pour tracer les courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (on fixe $\left\|\vec{\imath}\right\| = 5$ cm et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 15$ cm).

On précisera les points d'intersection des courbes que les questions précédentes permettent de connaître.

4. Calcul d'une primitive de f_p et application (p entier naturel non nul fixé).

a. Calculer la primitive F_p de f_p qui prend la valeur -1 en 0 (on pourra utiliser l'égalité (1) établie dans la partie 1. b.).

b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de

$$S = \int_2^4 f_2\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f_2\,\mathrm{d}x.$$