Baccalauréat C Bordeaux septembre 1973

EXERCICE 1

Le nombre naturel N, qui s'écrit 341 dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}$ en base a.

1. Trouver un encadrement de a^3.
2. Déterminer a. Vérifier.

EXERCICE 2

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit S_n la somme

$$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} + \ldots + \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

1. Posons $z = \cos\dfrac{\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{n}$.
   Donner une expression simple de la somme $1 + z + \ldots + z^{n-1}$.
   Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme.
   En déduire l'égalité

$$Sn = \frac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}.$$

2. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3. On désigne par I l'identité sur E.
Soit f un endomorphisme de E, vérifiant

$$f^3 - 7f + 6I = 0 \quad (\text{où } f^3 = f \circ f \circ f).$$

1. Pour tout réel λ, soit E_λ, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$.
   Montrer que E_λ, est un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer que si E_λ, n'est pas réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, le nombre λ est une racine de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$.
   Calculer les racines de cette équation.
2. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs donnés de E. Déterminer un triplet $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$, des vecteurs de E, tels que

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} = \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} + 9\overrightarrow{c} = \overrightarrow{w}.$$

   Montrer que le triplet $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est unique. Soit $\overrightarrow{u} \in E$ et soit $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ un triplet de vecteurs de E tel que

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} = f\left(\overrightarrow{u}\right) \text{ et } \overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} + 9\overrightarrow{c} = f^2\left(\overrightarrow{u}\right) \ \left(f^2 = f \circ f\right).$$

   Comparer les vecteurs $f\left(\overrightarrow{a}\right)$, $f\left(\overrightarrow{b}\right)$, $f\left(\overrightarrow{c}\right)$ aux vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.
   En conclure que tout vecteur de E peut s'écrire, de façon unique, comme somme de trois vecteurs appartenant respectivement à E_1, E_2 et E_{-3}.

3. Supposons que chacun des trois sous-espaces E_1, E_2 et E_{-3}, soit non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, et soit $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ des vecteurs, tous non nuls, appartenant respectivement à E_1, E_2 et E_{-3}.
Montrer que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de E.
Quel est dans ce cas la dimension de E_1, E_2 et E_{-3} ?
Soit $\overrightarrow{u} \in E$ et soit $(x\,;\,y\,;\,z)$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, par rapport à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}\right)$.
Donner l'expression des coordonnées $\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$ du vecteur $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ par rapport à cette base, en fonction de x, y, z.

4. L'un ou plusieurs, des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_{-3} peuvent-ils être réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$?
Soit $\left(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}\right)$ une base de E, et soit f l'endomorphisme de E, faisant correspondre à un vecteur de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans cette base, le vecteur de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -4x - 3z.$$

Posons $\overrightarrow{l} - \overrightarrow{n} = \overrightarrow{h}$. Montrer que $\left(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}\right)$ est une base de E.
Calculer $f\left(\overrightarrow{h}\right)$, $f\left(\overrightarrow{m}\right)$, $f\left(\overrightarrow{n}\right)$, et exprimer les coordonnées $\left(\alpha', \beta', \gamma'\right)$ du vecteur $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ dans la base $f(h)$, $f(m)$, $f(n)$ en fonction des coordonnées (α, β, γ) de $\overrightarrow{u}$ dans cette base.
En déduire que

$$f^3 - 7f + 6I = 0$$

et déterminer les sous-espaces E_1, E_2 et E_{-3}.

N. B. : La question **4.** est indépendante des questions **2.** et **3.**