

## ♣ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1977 ♣

### EXERCICE 1

4 POINTS

On considère le corps  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ .

1. Dresser les tables d'addition et de multiplication,
2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  l'équation  $\hat{2} + x = \hat{1}$ , en l'inconnue  $x$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  l'équation  $\hat{3}x = \hat{2}$ , en l'inconnue  $x$ .
4. Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  le système  $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{1}x + \hat{2}y = \hat{4} \end{cases}$  en les inconnues  $x$  et  $y$
5. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  l'équation, en l'inconnue  $x$ ,  $x^2 + \hat{2}x - \hat{3} = \hat{0}$ .

### EXERCICE 2

4 POINTS

Un sac contient cinq jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3.

On extrait simultanément deux jetons et on désigne par  $X$  la somme des nombres inscrits sur les deux jetons. Tous les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ ?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .
3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire  $X$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est considéré comme un espace vectoriel euclidien sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{B} = (1, i)$  la base constituée des nombres complexes 1 et  $i$ . On dira que le nombre complexe  $z = x + iy$  est le vecteur de coordonnées  $(x; y)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Si  $(x; y)$  et  $(x'; y')$  sont deux vecteurs de cet espace vectoriel, leur produit scalaire sera  $xx' + yy'$ . Soit

$a$  un réel donné et  $f_a$  l'application linéaire de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  de matrice  $m = \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On pose  $f(z) = Z = X + iY$  avec  $z = z + iy$  ( $x, y, X, Y$  réels).

1.
  - a. Quelles sont les coordonnées de  $Z$  dans la base  $\mathcal{B}$ ?
  - b. Exprimer  $Z$  en fonction de  $x$  et  $y$  puis en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$  où  $\bar{z} = x - iy$  désigne le nombre complexe conjugué de  $z = x + iy$ .
  - c. Quels sont les éléments de  $\mathbb{C}$  invariants par  $f_a$ ? Vérifier que l'ensemble de ces éléments est dans tous les cas un sous-espace de  $\mathbb{C}$ .
  - d. Pour quelle valeur du réel  $a$ ,  $f_a$  est-il une rotation vectorielle?
2.
  - a. Montrer que, quel que soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f_a$  est une bijection de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$ .  
Soit  $f_a^{-1}$  l'application réciproque de  $f_a$ . On pose  $f_a^{-1}(z) = X' + iY'$  ( $X', Y'$  réels).
  - b. Déterminer dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice de  $f_a^{-1}$ .
  - c. Soit  $z = x + iy$  un élément de  $\mathbb{C}$ . Exprimer  $Z' = f_a^{-1}(z)$  en fonction de  $x$  et  $y$  puis en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$ . Déterminer une relation entre  $Z, Z'$  et  $z$ . En déduire que  $f_a + f_a^{-1} = 2a\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$  où  $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$  est l'application identique dans  $\mathbb{C}$ .

- d. Si  $a \neq 0$ , déterminer le noyau et l'image de  $f_a - f_0$ .

### Partie B

Soit  $P$  un plan affine euclidien associé au plan vectoriel  $\mathbb{C}$  et rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$  et de base  $\mathcal{B}$ . On désigne par  $\varphi_a$  l'application affine de  $P$  dans  $P$  qui au point  $O$  associe le point  $A(1; a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et dont l'application linéaire associée est  $f_a$ . L'image par  $\varphi_a$  d'un point  $M$  est alors le point  $M' = \varphi_a(M)$ .

1. a. Déterminer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  du point  $M'$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$ .  
 b. Démontrer que si  $a \neq 1$  alors l'application affine  $\varphi_a$  admet un point invariant unique  $\Omega$  dont on déterminera les coordonnées.  
 Si  $a = 1$ , quel est l'ensemble des points invariants?  
 c. Établir que  $\varphi_a$  est la composée d'une application affine de point invariant  $O$  et d'une translation,  
 d. Quelle est l'image par  $\varphi_a$  de la droite affine d'équation  $x = 0$ ? de la droite affine d'équation  $y = 2ax$ ?
2. On suppose que  $a \neq 0$ . Montrer que  $\varphi_0$  est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. Quelle est l'image par  $\varphi_0$  du cercle de centre  $O$  et de rayon 1?  
 Quelles sont les images par  $\varphi_0$  des bissectrices des axes du repère.
3. On suppose  $a = 1$ .  
 a. Exprimer  $y' - x'$  en fonction de  $y - x$ . En déduire qu'il existe une famille de droites de même direction globalement invariantes par  $\varphi_1$ .  
 b. On considère la fonction numérique  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Étudier la fonction  $f$ . Construire sa courbe représentative  $(C)$  dans le repère  $(O, \mathcal{B})$ .

Déterminer une équation de la courbe  $(C')$  transformée de  $(C)$  par  $\varphi_1$ . Vérifier que cette équation peut s'écrire sous la forme  $x = y - \frac{1}{y}$ .

Construire  $(C')$  sur la même figure que  $(C)$ , (On pourra au préalable étudier et représenter la fonction  $g : x \mapsto y = x - \frac{1}{x}$ . On déduira la courbe  $(C')$  de la courbe représentative de la fonction  $g$ ).

4. a. On suppose  $a \neq 0$ . Soit  $T_1$  l'application affine de  $P$  dans  $P$  qui au point  $O$  associe le point  $A(1; a)$  et dont l'application linéaire associée est

$$u = f_a + f_a^{-1}.$$

Démontrer que  $T_1$  est une homothétie ou une translation,

- b. On suppose encore  $a \neq 0$ . Soit  $T_2$  l'application affine de  $P$  dans  $P$ , qui au point  $O$  associe le point  $A(1; a)$  et qui admet  $v = f_a - f_0$  pour application linéaire associée.  
 Démontrer que  $T_2$  est la composée d'une homothétie, d'une projection sur une droite et d'une translation.