

## ☞ Baccalauréat C septembre 1981 Bordeaux<sup>1</sup>

### EXERCICE 1

Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . À tout point  $P$  de  $\mathcal{P}$  on associe son affixe complexe  $p$ .

Soit  $1, j$  et  $j^2$  les racines cubiques de l'unité où

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

On se propose d'étudier la propriété (E) suivante relative à un triplet (A, B, C) de points de  $\mathcal{P}$  :

(E) : les affixes  $a, b$  et  $c$  des points A, B, C satisfont :

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

1. Soit  $T_{\vec{v}}$  une translation de vecteur  $\vec{v}$  définie dans  $\mathcal{P}$ .

Montrer que si le triplet (A, B, C) a la propriété (E), il en est de même de  $(T_{\vec{v}}(A), T_{\vec{v}}(B), T_{\vec{v}}(C))$ .

2. Soit un triangle équilatéral dont les sommets A, B et C sont disposés de sorte qu'une mesure de l'angle  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  soit  $\frac{\pi}{3}$ .

Montrer que (A, B, C) a la propriété (E).

3. Caractériser géométriquement la propriété (E).

### EXERCICE 2

L'espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère l'application affine  $f$  qui, à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$ , associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y'; z')$  tel que

$$\begin{cases} 2x' &= x + y - z\sqrt{2} + 2 \\ 2y' &= x + y + z\sqrt{2} + 2 \\ 2z' &= (x - y)\sqrt{2}. \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est un vissage.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de  $f$ .

### PROBLÈME

Soit  $P$  un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[0; 1]$  par

$$f(x) = x - 2x\sqrt{2} + 1.$$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

---

1. Caen, Clermont-Ferrand, Nantes, Poitiers, Rennes ☞

- Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $(f \circ f)(x) = x$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C})$  ?
- Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . (On prendra pour unité de longueur : 10 cm, et on déterminera les demi-tangentes à la courbe  $(\mathcal{C})$  aux points d'abscisses 0 et 1).
- Calculer l'aire du domaine plan limité par les axes de coordonnées et par la courbe  $(\mathcal{C})$ .

### Partie B

Soit, dans le plan  $P$ , les points  $A_1$  de coordonnées  $(0; \frac{1}{2} + \lambda)$  et  $B_1$  de coordonnées  $(0; \frac{1}{2} - \lambda)$  où  $\lambda$  est un paramètre réel de l'intervalle  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

On note  $D_\lambda$  la droite déterminée par les points  $A_1$  et  $B_1$ .

- Déterminer une équation de  $D_\lambda$  sous la forme

$$a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois fonctions dérivables de la variable  $\lambda$  que l'on déterminera.

- Soit  $D'_\lambda$  la droite d'équation

$$a'(\lambda)x + b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0$$

où  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  désignent les fonctions dérivées respectives de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Vérifier que, pour toute valeur de  $\lambda$  dans l'intervalle  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$   $D_\lambda$  et  $D'_\lambda$  sont sécantes en un point  $M_\lambda$ . Démontrer que les coordonnées  $(x_\lambda; y_\lambda)$  de  $M_\lambda$  sont

$$x_\lambda = \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 \quad \text{et} \quad y_\lambda = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2.$$

- Démontrer que, lorsque  $\lambda$  décrit l'intervalle  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  le point  $M_\lambda$  décrit la courbe  $(\mathcal{C})$  définie dans la partie A.
- Démontrer que, pour tout  $\lambda$  appartenant à l'intervalle  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  la droite  $D_\lambda$  est tangente en  $M_\lambda$  à la courbe  $(\mathcal{C})$ .

### Partie C

À tout point  $M$  du plan  $P$ , de coordonnées  $(x; y)$ , on associe son affixe  $z = x + iy$ . On appelle  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan  $P$  dont l'affixe  $z$  satisfait la relation (1)

$$(1) \quad \left| \frac{z + i\bar{z}}{2} \right| = \left| z - \frac{1}{2}(1 + i) \right|$$

- Démontrer que  $(\Gamma)$  admet pour équation dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

- Démontrer que la courbe  $(\mathcal{C})$ , définie dans la partie A, est incluse dans la courbe  $(\Gamma)$ .

3. Dans cette question le plan P est supposé orienté.

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un repère orthonormé direct.

Soit  $r$  la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est  $\frac{\pi}{4}$ .

Soit  $\vec{e}'_1 = r(\vec{e}_1)$ ,  $\vec{e}'_2 = r(\vec{e}_2)$ .

- a. Déterminer une équation de  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ .
- b. Quelle est la nature de  $(\Gamma)$ ? Quels sont ses éléments caractéristiques?
- c. Que signifie géométriquement la relation (1)?