Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux [1] septembre 1984

Exercice 1 **5 points**

1. Déterminer les solutions complexes z_1, z_2 avec $|z_1| < |z_2|$ de l'équation :

$$z^2 - 3(1+\text{i})z + 4\text{i} = 0.$$

2. Dans le plan P rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ soient A, B, C les points d'affixes respectives i, z_1, z_2.
   a. Représenter A, B, C dans P et déterminer l'affixe du barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, -2, 1.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de P vérifiant :

$$\overrightarrow{M\text{O}}^2 - 2\overrightarrow{M\text{A}}^2 + 2\overrightarrow{M\text{B}}^2 - \overrightarrow{M\text{C}}^2 = 2.$$

3. Déterminer la similitude directe transformant A en B et B en C. Préciser son centre, son angle, son rapport.

Exercice 2 **4 points**

Le plan orienté $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on désigne par A, B et C les points de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $(1\,;0)$, $\left(0~;~\sqrt{3}\right)$ et $(-1~;~0)$ dans ce repère.
On appelle r la rotation de centre B, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, r' la rotation de centre A, d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$, et s la symétrie par rapport à I (I milieu de (A, B)).
Soit f l'application $r' \circ s \circ r$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f (on utilisera $f(\text{C})$ et $f(\text{B})$).
2. Déterminer les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associées à r, r', s et f et retrouver ainsi les résultats du 1.

Problème **12 points**

Effet d'une transformation sur la représentation graphique d'une fonction

Un plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On note $\overline{\mathcal{P}}$ le plan privé de la droite de repère $\left(\text{O},~\vec{\imath}\right)$.
T désigne l'application de $\overline{\mathcal{P}}$ dans $\overline{\mathcal{P}}$ qui, au point $M(x,\,y)$, associe le point $M'(x',\,y')$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& -x\\ y' &=& \dfrac{1}{y}.\end{array}\right.$$

Partie A

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

1. L'objet de cette question est de construire M' à partir de M ; la suite du problème n'en dépend pas.
   Soit m la projection orthogonale d'un point M de $\overline{\mathscr{P}}$ sur la droite de repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$. On désigne par N_1 et par N_2 les points tels que $\overrightarrow{m\text{N}_1} - \overrightarrow{m\text{N}_2} = \overrightarrow{\imath}$, par M_1 l'orthocentre du triangle MN_1N_2 ? Calculer les coordonnées de M_1 en fonction des coordonnées de M (on pourra utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{\text{N}_2\text{M}_1} \cdot \overrightarrow{\text{N}_1 M}$ et en déduire que M' est le symétrique orthogonal de M_1 par rapport à la droite de repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. On donne les trois demi-droites D, Δ et L définies respectivement par $y = x + 1$ et $x \geqslant 1$; par $y = 2x + 1$ et $x \geqslant 1$; par $y = 1$ et $x \leqslant -1$.
   Donner une équation des courbes D$'$, Δ', L$'$ transformées respectives par T de D, Δ, L. On représentera D, Δ , L, D$'$, Δ', L$'$ sur un même dessin (unité 2 cm).

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 2 \\ f(x) & = & \dfrac{(1+x)\text{e}^x - 1}{\text{e}^x - 1} \quad \text{pour } x \neq 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer
   a. qu'on a, pour $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \left(\dfrac{x}{\text{e}^x - 1}\right)\text{e}^x$
   b. que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer
   a. que f est dérivable au point zéro et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ (on pourra utiliser le développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction qui à x associe e^x).
   b. que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$ pour tout x.
3. **a.** Soit α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\alpha(x) = \text{e}^x - x - 1$.
   Étudier les signes de $\alpha'(x)$ et de $\alpha(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. En déduire le tableau de variations de f.
   c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f. Démontrer que D et L sont asymptotes à $\mathscr{C}$. Préciser la position des branches infinies de $\mathscr{C}$ par rapport à D, Δ et L.
   Dessiner $\mathscr{C}$ sur la figure demandée au A 2.

Partie C

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & \dfrac{1}{2} \\ g(x) & = & \dfrac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x + x - 1} \quad \text{pour } x \neq 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ pour tout x. En déduire :
   a. que g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   b. que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(-x)$ et de $f'(-x)$. Préciser $g'(0)$.
   c. préciser les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Soit Γ la courbe représentative de g. Montrer que Γ est la transformée, par T de $\mathscr{C}$. En utilisant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D et Δ (cf. B 3. c.), montrer qu'on a :

$$\forall x \in]-\infty\,;\,-1], \quad \frac{1}{1-2x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

et préciser la position de Γ par rapport à D' et Δ'. Compléter la figure demandée au A 2. par le tracé de Γ.

3. Soit $\mathscr{A}_1(\lambda)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $\lambda \leqslant x \leqslant -1$ et
$0 \leqslant y \leqslant g(x)$ et $\mathscr{A}_2(\mu)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :
$1 \leqslant x \leqslant \mu$ et $g(x) \leqslant y \leqslant 1$.
On ne cherchera pas à calculer $\mathscr{A}_1(\lambda)$ et $\mathscr{A}_2(\mu)$.

a. Prouver que $\mathscr{A}_1(\lambda)$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $-\infty$.

b. Prouver que l'on a : $1 - g(x) \leqslant x\text{e}^{-x}$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire que $\mathscr{A}_2(\mu)$ admet une limite finie quand μ tend vers $+\infty$.