

♪ **Baccalauréat série mathématiques et technique** ♪
Bordeaux juin 1947

I.

On considère deux cercles (C) de centre O, de rayon R, et (C') intérieur à (C), de centre O', de rayon r, le point O' étant situé sur l'axe Ox, $\overline{OO'} = a$.

Un point M variable sur la circonférence de (C) est défini par l'angle

$$(\text{Ox}, \text{OM}) = 2\varphi.$$

1. M_1 et M_2 étant deux points de (C) définis par les angles φ_1 et φ_2 , montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la corde M_1M_2 soit tangente à (C') peut s'écrire

$$(1) \quad (a - R) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - (a + R) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + r = 0.$$

On pourra considérer le milieu P de la corde M_1M_2 et le point de contact P' avec (C') et projeter le contour $OO'P'P$ sur OP.

2. On mène de M_2 la seconde tangente à (C') – la première étant M_2M_1 – qui rencontre (C) en M_3 .

Montrer qu'il existe entre les paramètres φ_1 et φ_3 , de M_1 et M_3 une relation de la forme,

$$(2) \quad A \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + B \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + C = 0$$

et donner des expressions de A, B, C en fonction de a, R, r.

Pour cela, on pourra écrire la relation (1) pour φ_1, φ_2 et pour φ_2, φ_3 , tirer $\cos \varphi_2$ et $\sin \varphi_2$ des deux équations ainsi obtenues et porter dans la relation $\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1$.

3. En comparant les relations (1) et (2), montrer que l'enveloppe de la corde M_1M_2 est un cercle (K).

Former la relation que doivent vérifier a, R, r pour que (K) coïncide avec (C').

Démontrer que st. deux cercles (C) et (C') sont tels qu'il existe un triangle inscrit dans (C), circonscrit à (C'), il existe une infinité de tels triangles.

Quel est le lieu du centre du cercle des neuf points de ces triangles?

II. 1^{er} sujet

Homothétie. Produit de deux homothéties.

II. 2^e sujet

Dérivées des fonctions

$$y = \sin x, \quad y = \cos x \quad \text{et} \quad y = \text{tg } x.$$

II. 3^e sujet

Tangentes menées d'un point à une ellipse.