Baccalauréat - Bordeaux juin 1951

SÉRIE MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

Exercice 1

1. On considère une ellipse (E) de centre O, d'axes AA$'$ et BB$'$, de foyers F et F$'$.
   AA$' = 2a$; BB$' = 2b$; $(b < a)$; FF$' = 2c$.
   Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée. Montrer que la division AA$'$FH est harmonique.
   La perpendiculaire à AA$'$ en F coupe (E) en K et K$'$; en utilisant le cercle principal, montrer que la tangente KT à (E) en K passe par H.
   Calculer FK, OH, FH et la tangente de l'angle de KT avec le grand axe.
   On donnera des expressions rationnelles en a, b, c.
2. On considère dans un plan vertical (V) deux axes perpendiculaires $x_1'\mathrm{S}x_1$, $z'\mathrm{S}z$ (Sx, est horizontal et orienté vers la droite, Sz est vertical et orienté vers le haut). D'autre part on désigne par (Q) le plan horizontal perpendiculaire à $z'\mathrm{S}z$ en un point O situé sur Sz'. Un segment de longueur constante 2ℓ, dont les extrémités se déplacent sur les demi-droites Sx_1, et Sz, est le diamètre d'un cercle (C) dont le plan est perpendiculaire au plan (V). Soit α l'angle aigu du segment avec $x_1'\mathrm{S}x$, et soit (E) la projection du cercle (C) sur le plan (Q).
   On propose aux candidats l'étude des courbes (E) :
   a. Calculer les demi-axes, la demi-distance focale à l'aide de ℓ et α.
   Quelle est l'excentricité ?
   Trouver le lieu des sommets et celui des foyers.
   Trouver l'enveloppe des cercles directeurs.
   b. Soient ω le centre de (E) ; $y'\mathrm{O}y$ la tangente en O à (E) ; $x'\mathrm{O}x$ l'axe perpendiculaire en O à $y'\mathrm{O}y$; A et A$'$ les sommets du grand axe, F et F$'$ les foyers.
   La perpendiculaire en F à AA$'$ coupe (E) en deux points ; on désigne par K le point le plus près de $y'\mathrm{O}y$.
   Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée ; A est entre F et H ; la tangente en K à (E) passe par H et coupe $x'\mathrm{O}x$ en I.
   Calculer FK, ωH, FH en fonction de ℓ et α.
   Si β est l'angle de IH avec le grand axe, montrer que $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha$.
   Montrer que $\omega\mathrm{I} = \ell$.
   Soit K$'$ la projection de F sur $y'\mathrm{O}y$; IK$'$ coupe le grand axe en J.
   Montrer que OK passe par J.
   En déduire une construction simple des points K et H quand on se donne le point F sur son lieu.
   Montrer que l'angle de IJ avec le grand axe est $\dfrac{\alpha}{2}$.
   IH coupe $y'\mathrm{O}y$ en L ; montrer que FL coupe $x'\mathrm{O}x$ en un point fixe Q.
   c. Le cercle de centre Ω, de rayon ℓ, coupe $x'\mathrm{O}x$ en O et en O$_1$; IH coupe ce cercle en M et M$_1$; les perpendiculaires en M et M$_1$ à IH coupent $x'\mathrm{O}x$ en φ et en φ_1.
   Montrer que Q est le milieu de $\varphi\varphi_1$.
   Montrer, en évaluant la puissance de I par rapport au cercle de diamètre $\varphi\varphi_1$ que φ et φ_1 sont fixes.
   Évaluer le produit $\overline{\varphi \mathrm{M}}\cdot\overline{\varphi_1\mathrm{M}_1}$.
   Montrer que l'enveloppe de IH est une hyperbole dont on demande les éléments.

La droite IH coupe la perpendiculaire $y_1'Oy$, à $x'Ox$ en un point L_1.
Évaluer OL et O_1L_1 en fonction de ℓ et α. Quelle est la valeur du produit $\overline{OL} \cdot \overline{O_1L_1}$.

Exercice 2

1[er] sujet. - Primitive d'une fonction. Signification géométrique.
Application : Calculer l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y = 3x^2 - 2x - 1$ et les droites $x = -2$, $x = +2$.

2[e] sujet. - Dérivée. Signification géométrique.
Dérivée de la racine carrée d'une fonction possédant une dérivée.
Application : Dérivée de la racine carrée de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 3x - 1}{\sin 3x}$$

3[e] sujet. - Variation et représentation graphique de

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 1}$$