Durée : 4 heures

Baccalauréat Bordeaux septembre 1966 série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x + 1.$$

Resoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres reels, les equations :

- $f(x) = 0$;
- $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x + \frac{f(x)}{1-\sqrt{3}}}$.

II.

Soit quatre points fixes, O, A, B et C, non coplanaires. On appelle (Δ) la droite OC et Π le plan OAB. Tout point M de l'espace est repere par le triplet $(x~;~y~;~z)$ de ses coordonnees réelles telles que $\overrightarrow{\text{OM}} = x.\overrightarrow{\text{OA}} + y.\overrightarrow{\text{OB}} + z.\overrightarrow{\text{OC}}$.

Quel que soit le nombre réel k, f_k, désigne l'application de l'espace dans lui-même telle que l'image M' du point M soit définie par

$$\overrightarrow{\text{HM}'} = k.\overrightarrow{\text{HM}},$$

où H est la projection de M sur (Δ) parallèlement à Π.

Partie A

1. Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles de M.
   Soit un second point quelconque, M_1 et son image, M'_1. Comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MM}_1}$ et $\overrightarrow{\text{M}'\text{M}'_1}$.
   Qu'en déduit-on pour les images de deux bipoints (ou vecteurs liés) équipollents ?
2. Lorsque $i = 1$ ou $i = 2$, on pose $\overrightarrow{\text{MM}_i} = \overrightarrow{\text{V}_i}$ et $\overrightarrow{\text{M}'\text{M}'_i} = \overrightarrow{\text{V}'_i}$, en désignant par M'_i l'image de M_i.
   On note alors $f_k\left(\overrightarrow{\text{V}_i}\right) = \overrightarrow{\text{V}'_i}$.
   Justifier l'égalité
   $$f_k\left(\overrightarrow{\text{MM}_1}\right) = \overrightarrow{\text{M}'\text{M}'_1}.$$
   Démontrer que $f_k\left(\overrightarrow{\text{MM}_1} + \overrightarrow{\text{MM}_2}\right) = f_k\left(\overrightarrow{\text{MM}_1}\right) + f_k\left(\overrightarrow{\text{MM}_2}\right)$ et que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_k\left(\lambda\left(\overrightarrow{\text{MM}_1}\right)\right) = \lambda f_k\left(\overrightarrow{\text{MM}_1}\right)$.

Partie B

1. Soit Π' un plan parallèle à Π ; préciser l'image de Π' par f_k, et trouver une application classique simple donnant de chaque point de Π' la même image que f_k.
   Même question pour un plan Π'' contenant (Δ).
   Quel est l'ensemble des points invariants dans f_k ? Pour quelles valeurs de k, f_k est-elle une application biunivoque ?
   On suppose cette condition remplie dans toute la suite du problème.

2. Établir que toute application f_k, admet une application réciproque, qui est $f_{k'}$ pour une valeur de k' à préciser.

   Pour quelles valeurs de k, $f_{k'}$, coïncide-t-elle avec f_k ?

   Reconnaître, en particulier, ces applications lorsque (Δ) est perpendiculaire à Π.

3. Établir que l'ensemble E des applications f_k, biunivoques a une structure de groupe pour la loi « produit d'applications ».

   Ce groupe est-il commutatif ?

Partie C

On suppose, dans cette partie exclusivement que le repère défini par (O, A, B, C) est orthonormé

1. Quel est l'ensemble des points M tels que les droites OM et OM$'$ soient perpendiculaires ?

   Discuter suivant les valeurs de k et indiquer avec précision le résultat lorsque $k = -3$.

2. À quelle condition deux points M et M$'$ sont-ils à la même distance l'un de l'autre que leurs images dans f_k ?

Partie D

1. Démontrer que l'image dans f_k, d'un barycentre de deux ou de trois points est le barycentre de leurs images affectées des mêmes coefficients.
2. Déterminer les images par f_k, d'un segment M_1M_2, d'une droite M_1M_2, d'un plan défini par trois points, M_1 M_2 et M_3.