

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat Bordeaux septembre 1966 ⌘
série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x + 1.$$

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, les équations :

- $f(x) = 0$;
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x + \frac{f(x)}{1-\sqrt{3}}}.$

II.

Soit quatre points fixes, O, A, B et C, non coplanaires. On appelle (Δ) la droite OC et Π le plan OAB. Tout point M de l'espace est repéré par le triplet $(x; y; z)$ de ses coordonnées réelles telles que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}.$

Quel que soit le nombre réel k , f_k , désigne l'application de l'espace dans lui-même telle que l'image M' du point M soit définie par

$$\overrightarrow{HM'} = k \cdot \overrightarrow{HM},$$

où H est la projection de M sur (Δ) parallèlement à Π .

Partie A

1. Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles de M.

Soit un second point quelconque, M_1 et son image, M'_1 . Comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M'M'_1}$.

Qu'en déduit-on pour les images de deux bipoints (ou vecteurs liés) équipollents?

2. Lorsque $i = 1$ ou $i = 2$, on pose $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{V_i}$ et $\overrightarrow{M'M'_i} = \overrightarrow{V'_i}$, en désignant par M'_i l'image de M_i

On note alors $f_k(\overrightarrow{V_i}) = \overrightarrow{V'_i}.$

Justifier l'égalité

$$f_k(\overrightarrow{MM_1}) = \overrightarrow{M'M'_1}.$$

Démontrer que $f_k(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}) = f_k(\overrightarrow{MM_1}) + f_k(\overrightarrow{MM_2})$ et que,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_k[\lambda(\overrightarrow{MM_1})] = \lambda f_k(\overrightarrow{MM_1}).$$

Partie B

1. Soit Π' un plan parallèle à Π ; préciser l'image de Π' par f_k , et trouver une application classique simple donnant de chaque point de Π' la même image que f_k .

Même question pour un plan Π'' contenant (Δ) .

Quel est l'ensemble des points invariants dans f_k ? Pour quelles valeurs de k , f_k est-elle une application biunivoque ?

On suppose cette condition remplie dans toute la suite du problème.

2. Établir que toute application f_k , admet une application réciproque, qui est $f_{k'}$ pour une valeur de k' à préciser.

Pour quelles valeurs de k , $f_{k'}$, coïncide-t-elle avec f_k ?

Reconnaître, en particulier, ces applications lorsque (Δ) est perpendiculaire à Π .

3. Établir que l'ensemble E des applications f_k , biunivoques a une structure de groupe pour la loi « produit d'applications ».

Ce groupe est-il commutatif ?

Partie C

On suppose, dans cette partie exclusivement que le repère défini par (O, A, B, C) est orthonormé

1. Quel est l'ensemble des points M tels que les droites OM et OM' soient perpendiculaires ?

Discuter suivant les valeurs de k et indiquer avec précision le résultat lorsque $k = -3$.

2. À quelle condition deux points M et M' sont-ils à la même distance l'un de l'autre que leurs images dans f_k ?

Partie D

1. Démontrer que l'image dans f_k , d'un barycentre de deux ou de trois points est le barycentre de leurs images affectées des mêmes coefficients.
2. Déterminer les images par f_k , d'un segment M_1M_2 , d'une droite M_1M_2 , d'un plan défini par trois points, M_1 , M_2 et M_3 .