∽ Baccalauréat Bordeaux septembre 1967 ∾
Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, chacune de équations suivantes :

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 3 \pmod{6},\\ 3x &\equiv 3 \pmod{5},\\ 3x &\equiv 8 \pmod{5}.\end{aligned}$$

II.

On donne un parallélogramme ABCD. On pose $\dfrac{\text{AD}}{\text{AB}} = k$ et $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \alpha (\text{mod.}\, 2\pi)$.
Construire, avec la règle et le compas, le transformé du parallélogramme ABCD dans la similitude de centre A, de rapport k, d'angle α.
Justifier cette construction.

III.

1. Donner le tableau de variation et le graphique (C), par rapport à un repère orthonormé, de la fonction définie par

$$y = -x + \frac{1}{1-x}.$$

On justifiera la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote oblique.

2. **a.** Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$m = -x + \frac{1}{1-x}$$

où m désigne un paramètre.

b. On appelle M$'$ et M$''$ les points d'intersection, quand ils existent, de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = m$.
Calculer la longueur M$'$M$''$ en fonction de m.

c. Démontrer que l'ensemble des milieux de M$'$M$''$ appartient à une droite (D) qui passe par l'intersection, D, des asymptotes de (C).
Démontrer que le faisceau constitué par les deux asymptotes de (C), la droite (D) et la parallèle à Ox menée par D est harmonique.

d. On appelle P$'$ et P$''$ les projections de M$'$et M$''$ sur l'axe Ox.
Démontrer que l'ensemble des cercles de diamètre P$'$P$''$ est un faisceau, (F), dont on indiquera la nature.

e. Soit A le point de Ox dont l'abscisse rend minimal $y = \left|-x + \dfrac{1}{1-x}\right|$.
Comment le faisceau (F) est-il transformé dans une inversion de centre A et de puissance arbitraire ?

3. **a.** En supposant $|x| < \dfrac{1}{2}$, montrer qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\left|-x + \frac{1}{1-x}\right| < k|x|.$$

b. Étant donné $\epsilon > 0$, existe-t-il un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$|x| < \alpha \text{ implique } \left|-x + \frac{1}{1-x}\right| < \epsilon ?$$

4. Étudier la fonction définie par

$$z = |-x| + \left|\frac{1}{1-x}\right|.$$

On précisera les demi-tangentes au point anguleux.

N. B. - On peut traiter le **4.** avant le **3.**