

⌘ Baccalauréat Bordeaux septembre 1967 ⌘
Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, chacune de équations suivantes :

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 3 \pmod{6}, \\ 3x &\equiv 3 \pmod{5}, \\ 3x &\equiv 8 \pmod{5}. \end{aligned}$$

II.

On donne un parallélogramme ABCD. On pose $\frac{AD}{AB} = k$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \alpha \pmod{2\pi}$.

Construire, avec la règle et le compas, le transformé du parallélogramme ABCD dans la similitude de centre A, de rapport k , d'angle α .

Justifier cette construction.

III.

1. Donner le tableau de variation et le graphique (C), par rapport à un repère orthonormé, de la fonction définie par

$$y = -x + \frac{1}{1-x}.$$

On justifiera la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote oblique.

2. a. Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$m = -x + \frac{1}{1-x}$$

où m désigne un paramètre.

- b. On appelle M' et M'' les points d'intersection, quand ils existent, de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = m$.

Calculer la longueur $M'M''$ en fonction de m .

- c. Démontrer que l'ensemble des milieux de $M'M''$ appartient à une droite (D) qui passe par l'intersection, D, des asymptotes de (C).

Démontrer que le faisceau constitué par les deux asymptotes de (C), la droite (D) et la parallèle à Ox menée par D est harmonique.

- d. On appelle P' et P'' les projections de M' et M'' sur l'axe Ox.

Démontrer que l'ensemble des cercles de diamètre $P'P''$ est un faisceau, (F), dont on indiquera la nature.

- e. Soit A le point de Ox dont l'abscisse rend minimal $y = \left| -x + \frac{1}{1-x} \right|$.

Comment le faisceau (F) est-il transformé dans une inversion de centre A et de puissance arbitraire?

3. a. En supposant $|x| < \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\left| -x + \frac{1}{1-x} \right| < k|x|.$$

b. Étant donné $\epsilon > 0$, existe-t-il un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$|x| < \alpha \text{ implique } \left| -x + \frac{1}{1-x} \right| < \epsilon?$$

4. Étudier la fonction définie par

$$z = | -x | + \left| \frac{1}{1-x} \right|.$$

On précisera les demi-tangentes au point anguleux.

N. B. - On peut traiter le **4.** avant le **3.**