

Boulier chinois et algorithmes de calcul

Caroline Poisard

Le boulier ? Un objet aujourd'hui quasiment disparu de nos salles de classe après y avoir régné en maître... Mais sait-on que plusieurs civilisations ont développé leur propre boulier ? Boulier français, boulier russe, boulier japonais, boulier chinois... C'est ce dernier que nous vous proposons de découvrir au travers de deux articles complémentaires.

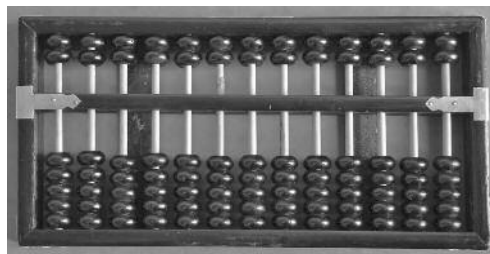
Dans le premier article nous présente le boulier chinois et son intérêt didactique.

S'inspirant justement du travail de cette chercheuse, Valérie Larose a construit des séances autour du boulier chinois, à la fois pour la formation continue des maîtres (dans le cadre d'animations de circonscription), celle des PE et dans le cadre d'une liaison CM2/6ème déjà évoquée dans le BV n° 468. C'est cette dernière expérience qu'elle nous fait partager dans le second article.

Vous pourrez retrouver le dossier complet « La fabrication et l'étude d'instruments à calculer » de Caroline Poisard sur le site internet CultureMath (<http://www.dma.ens.fr/culturemath/>), rubrique Matériaux pour la classe.

Caroline Poisard
IUFM de Bretagne -
Université de
Bretagne Occidentale
Laboratoire du Créad
caroline.poisard@bretagne.iufm.fr

Notre intention est ici de présenter le boulier chinois (ou suan-pan) pour une étude en classe de mathématiques. Nous analysons en particulier le lien entre les techniques de calcul sur le boulier chinois et les algorithmes envisageables en papier-crayon. Le boulier est répandu en Chine depuis le 12^{ème} siècle, et probablement présent depuis les premiers siècles après J.-C. L'étude que nous proposons ici est *occidentalisée*, c'est-à-dire dans l'objectif d'un travail sur la numération et les algorithmes, et non pour un apprentissage précoce et automatique des techniques.



Un boulier chinois indiquant zéro

Pour la lecture de ce document, nous recommandons d'avoir un boulier à portée de main. Pour la classe, il sera nécessaire d'avoir au moins un boulier pour deux élèves, ainsi qu'un rétroprojecteur

sur lequel on pose le boulier ou bien des aimants à placer au tableau sur un cadre de boulier dessiné. On pourra aussi utiliser un boulier virtuel¹.

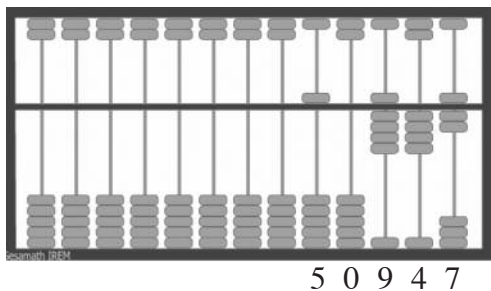
Nous allons maintenant développer la lecture et l'inscription des nombres sur le boulier puis l'addition, la soustraction et la multiplication.

Inscrire et lire un nombre

Dans le dossier publié en ligne, nous présentons l'étude du boulier chinois en classe à partir de la question directement posée aux élèves : *Comment fonctionne le boulier chinois ?* Ici, nous allons répondre à cette question. La photo ci-contre du boulier indique zéro, pour inscrire un nombre on déplace les boules. Sur une même tige, on dispose de 7 boules : deux *quinaires* (dans la partie supérieure qui valent chacune cinq) et cinq *unaires* (dans la partie inférieure qui valent chacune un). Pour inscrire un nombre, on claque les boules vers la barre centrale du boulier. Chaque tige du boulier correspond à une position de la numération : la tige de

¹ Par exemple, le boulier virtuel du site Sésamath-IREM, dont sont issues les copies d'écran de cet article. http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/exo1.html

droite représente les unités, la deuxième tige en partant de la droite les dizaines, la troisième les centaines, etc. Par exemple, le boulier ci-dessous indique 50 947. Dans les unités, on a activé une quinaire et deux unaires, dans les dizaines : quatre unaires, dans les centaines : une quinaire et quatre unaires, dans les unités de mille : aucune boule n'est activée et dans les dizaines de mille : une quinaire est activée.



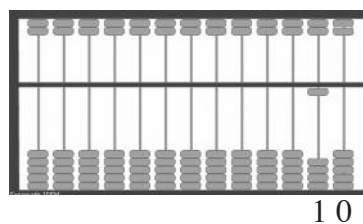
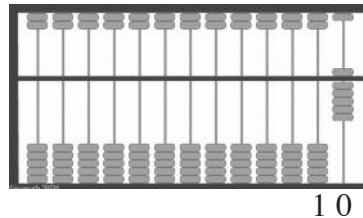
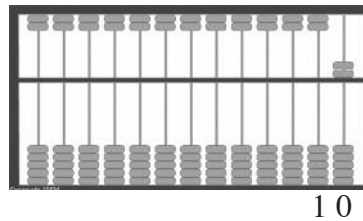
On peut faire le lien entre l'écriture polynomiale des nombres et celle sur le boulier :

$$50947 = 5 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 5 \times 10^4 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10 + 7$$

Examinons maintenant deux questions qui viennent spontanément à l'étude en classe : *Est-ce que les nombres ont alors une écriture unique ? Quel est le plus grand nombre que l'on peut inscrire sur le boulier ?*

Tout d'abord, sur le boulier chinois, les nombres ne possèdent pas une unicité d'écriture. Par exemple, 5 peut s'écrire comme une quinaire ou cinq unaires. L'inscription d'une quinaire est plus *économique* dans le sens où elle déplace moins de boules, elle est aussi plus rapide à la lecture, c'est celle qui sera retenue pour l'inscription. Prenons un autre exemple. Combien existe-t-il de manières pour inscrire 10 sur le boulier chinois ? Trois manières : comme 10 unités, en activant soit deux quinaires, soit une quinaire et cinq unaires, soit comme une

dizaine et zéro unité (on active alors une unaire dans les dizaines).



On propose la convention d'écriture de 10 comme une dizaine, et on utilise les échanges (et donc les deux autres écritures possibles) pour effectuer des calculs. Pour qu'il y ait unicité d'écriture, il faudrait que chaque tige ne possède qu'une quinaire et quatre unaires. En effet, ceci permet d'inscrire de 0 à 9 dans chaque position, le minimum nécessaire en base 10. C'est le cas du boulier japonais (ou soroban) qui possède donc cinq boules par tiges : une quinaire et quatre unaires ! Notre choix s'est porté vers le boulier chinois parce que justement cette non-unicité d'écriture permet de mettre en évidence la notion d'échange entre les rangs en numération de position. On peut dire que l'on *manipule les retenues à la main* sur le boulier chinois.

Maintenant, étudions la deuxième question : *Quel est le plus grand nombre inscriptible ?* C'est-à-dire, si toutes les boules sont activées, quel est le nombre inscrit sur le boulier ? Cette question est intéressante parce qu'elle nécessite de prendre de la distance avec le boulier pour

y répondre, d'utiliser un codage. Prenons le cas d'un boulier à 13 tiges. Si dans chaque tige toutes les boules sont activées, on lit 15 dans chaque position et le nombre inscrit est alors :

$$\begin{aligned} & 15 + 150 + 1\ 500 + \dots + 15 \times 10^{12} \\ & = 15 \times (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{12}) \\ & = 15 \times 1\ 111\ 111\ 111\ 111 \\ & = 16\ 666\ 666\ 666\ 665 \end{aligned}$$

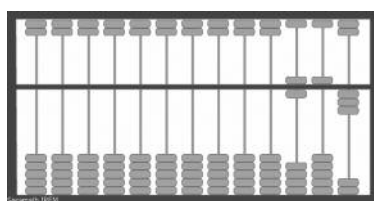
Ce nombre se lit : 16 trillions 666 milliards 666 millions 666 mille 665.

Concernant l'inscription et la lecture des nombres sur le boulier chinois, nous proposons une fiche d'exercices pour la classe téléchargeable sur le site internet de la revue Plot³.

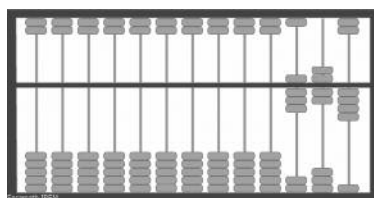
³<http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique13>

L'addition

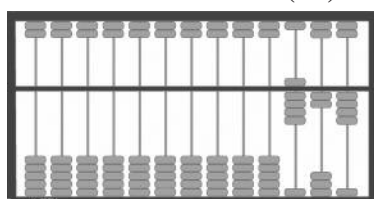
Étudions l'addition avec retenue 653+271. La retenue est dans le rang des dizaines. Sur le boulier, on inscrit 653 puis par-dessus, on inscrit 271. On ne peut pas alors lire le résultat qui comporte 12 boules activées dans les dizaines (soit 120), il est donc nécessaire d'échanger 10 dizaines contre une centaine pour lire le résultat : 924. Cet échange se réalise *à la main*.



6 5 3



8 (12) 4



9 2 4

Il nous faut maintenant faire le lien avec l'écriture papier-crayon de ce calcul, comparons l'algorithme en colonnes et les techniques sur boulier.

$$\begin{array}{r} \text{L'algorithme en} \\ \text{colonnes s'écrit :} \\ \begin{array}{r} 16\ 5\ 3 \\ +\ 2\ 7\ 1 \\ \hline 9\ 2\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Avec le boulier, on peut} \\ \text{l'écrire en représentant} \\ \text{les 12 dizaines :} \\ \begin{array}{r} 6\ 5\ 3 \\ +\ 2\ 7\ 1 \\ \hline 8\ 12\ 4 \\ \hline 9\ 2\ 4 \end{array} \end{array}$$

On peut aussi effectuer le calcul directement des 5 dizaines et

$$\begin{array}{r} 7\ \text{dizaines :} \\ \begin{array}{r} 6\ 5\ 3 \\ +\ 2\ 7\ 1 \\ \hline 4 \\ 1\ 2\ 0 \\ 8\ 0\ 0 \\ \hline 9\ 2\ 4 \end{array} \end{array}$$

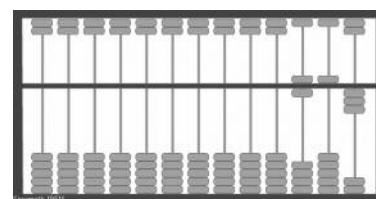
$$50 + 70 = 120,$$

c'est-à-dire :

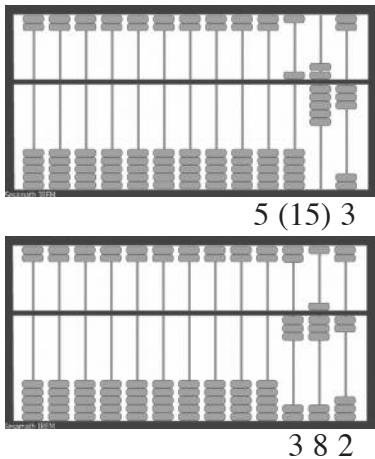
Dans certains cas, comme pour 653 + 281 par exemple, il est nécessaire d'effectuer des échanges avant la fin du calcul.

La soustraction

Étudions la soustraction avec retenues 653-271. Avec le boulier, la soustraction n'est pas immédiate dans le rang des dizaines, pour effectuer ce calcul, il faut emprunter une centaine à 653 que l'on écrira comme 10 dizaines. Sur le boulier, on désactive une unaire des centaines et on active une quinaire et 5 unaires dans les dizaines. On peut maintenant enlever 271 et lire le résultat : 382.



6 5 3



Prolongements et conclusion

On a vu que le boulier chinois est intéressant pour travailler sur la numération décimale, sur les grands nombres, et les algorithmes de calcul. Il l'est aussi pour travailler avec les nombres décimaux. En effet, il suffit de se donner une autre convention d'écriture des nombres, par exemple les unités seront inscrites sur la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse la possibilité d'inscrire et d'effectuer des opérations avec des nombres à trois chiffres après la virgule.

Comme pour le boulier, ce qui nous paraît important pour une étude mathématique en classe, c'est d'explicitier les différents algorithmes utilisés : ceux papier-crayon et ceux mis en évidence sur l'instrument à calculer. En effet, l'utilisation d'instruments matériels est motivante pour les élèves, mais il faut dépasser la simple manipulation pour donner du sens aux concepts mathématiques en jeu. En particulier, les phases de synthèse en classe sont primordiales et nécessitent d'utiliser un vocabulaire précis (unaires, quinaires, unités, dizaines, etc.) et du matériel spécifique (matériel aimanté à placer au tableau, ou un rétro-projecteur ou un vidéo-projecteur).

Comparons maintenant les techniques papier-crayon et boulier pour la soustraction. C'est la méthode par emprunts, très répandue dans le monde, en particulier anglo-saxon, que l'on utilise sur le boulier. Cette méthode ne nécessite que des connaissances sur la numération de position. La méthode par ajouts parallèles, la plus répandue en France, est plus délicate à comprendre, elle nécessite de connaître la numération de position et aussi des propriétés opératoires. De plus, elle fait intervenir deux retenues que l'on écrit avec la même notation : 1, une retenue signifiant +10 et l'autre +1, ce qui est source de confusion.

La méthode par ajouts parallèles :

$$\begin{array}{r} 6 \quad 15 \quad 3 \\ - \quad 2 \quad 7 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 8 \quad 2 \end{array}$$

On a $653 - 271 = (653+100) - (271+100)$ et 100 s'écrit comme 10 dizaines (1ère ligne) puis une centaine (2ème ligne).

La méthode par emprunts :

$$\begin{array}{r} 5 \\ \cancel{6} \quad 15 \quad 3 \\ - \quad 2 \quad 7 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 8 \quad 2 \end{array}$$

On a $653 - 271 = (653-100+100) - 271$. On « casse » les 6 centaines (1ère ligne), il ne reste que 5 centaines et on ajoute 10 dizaines aux dizaines, ce qui donne 15 dizaines.

NDLR : concernant les algorithmes de la soustraction, lire et relire le document d'accompagnement « Le calcul posé à l'école » paru en 2002 et toujours d'actualité !

Il est téléchargeable sur le site de l'APMEP à l'adresse

<http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article106>

(rubrique commissions et groupes de travail / premier degré).