Brevet A. O. F. juin 1957

ALGÈBRE

Partie A

Calculer le produit

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right).$$

Utiliser le résultat pour simplifier la fraction

$$A=\frac{x^3+y^3-\left(x^2y+xy^2\right)}{(x-y)\left(x^2+2xy+y^2\right)}.$$

Partie B

1. Construire, par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, la droite (L) d'équation 2 + 28

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{28}{3}.$$

2. Montrer que, quelle que soit la valeur donnée au nombre m, les droites (D) d'équation $y=2x+m$ présentent une particularité, que l'on mettra en évidence.

   Quel est le point de la droite (D) dont l'ordonnée est égale à m ?

   Construire sur le graphique où la droite (L) est déjà tracée, la droite (D_0) correspondant à $m=0$.

3. En utilisant le graphique précédent, montrer comment, pour une valeur donnée de m, on peut résoudre graphiquement l'équation

$$(E)\qquad 2x+m=-\frac{2}{3}x-\frac{28}{3}.$$

   Déterminer graphiquement comment doit être choisi le nombre m, pour que l'équation E admette une solution comprise entre 2 et 5.

   (On justifiera les constructions qu'on sera appelé à effectuer pour résoudre les questions posées dans cette partie 3.)

N.B. - Les parties A et B sont entièrement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

GÉOMÉTRIE

1. Étant donné un triangle isocèle ABC (AB = AC), montrer qu'il est possible de tracer un cercle de centre O tangent en B et C aux côtés [AB] et [AC] de ce triangle.

   Justifier très brièvement la construction.

   Comment se place le centre O par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC ?

2. Soit S un point du cercle de centre O, choisi sur l'arc $\overset{\frown}{\text{BC}}$ plus petit qu'un demi-cercle ; les droites (BS) et (CS) coupent la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\text{A}}$ du triangle ABC, respectivement en M et P.

   Montrer que les angles $\widehat{\text{MSP}}$ et $\widehat{\text{MAB}}$ sont égaux.

3. Comparer le triangle SMP au triangle AMB ; puis au triangle ACP.

4. En déduire que

$$\text{AP} \times \text{AM} = \overline{\text{AB}}^2.$$