∽ Brevet Aix-Marseille juin 1981 ∾

Algèbre

Exercice 1

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 9(-x+2)^2 + 5(2x-3)(-x+2).$$

   a. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant le puissances décroissantes de x.

   b. Factoriser $f(x)$; résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2. **a.** Dans un plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer la droite (D) d'équation $y = -x+2$ et la droite (D') d'équation $y = x+3$ (on prendra pour unité de longueur le double-centimètre).

   Quelles sont les coordonnées des points A et A′ d'intersection de l'axe $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath}\right)$ respectivement avec le droites (D) et (D') ?

   b. Soit H le point de $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath}\right)$, M le point de (D) et M′ le point de (D') ayant tous les trois pour abscisse le réel x.

   Exprimer en fonction de x, le produit $\overline{\text{HA}} \cdot \overline{\text{HA}'}$ et le produit $\overline{\text{HM}} \cdot \overline{\text{HM}'}$.

   Que peut-on remarquer ?

   En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ et de l'équation $|f(x)| = f(x)$.

Géométrie

On donne un cercle C de centre O et de rayon 4 cm et un diamètre [AB] de ce cercle.
Construire un point M de C tel que AM = AO.

1. Démontrer que le triangle (A, O, M) est équilatéral.
2. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) et N Je symétrique de M par rapport à (AB).

   Démontrer que N est un point de C.

   Démontrer que (A, M, O, N) est un losange.
3. On note s la symétrie centrale de centre O ; soit P et Q les images de M et de N dans cette symétrie centrale.

   Démontrer que P et Q sont des points de C.
4. Démontrer que (M, N, P. Q) est un rectangle.
5. Que peut-on dire du triangle (A, B, M) ?

   Calculer BM.
6. Démontrer que les quatre angles $\widehat{\text{AMH}}$, $\widehat{\text{HMO}}$, $\widehat{\text{OMB}}$ et $\widehat{\text{BMQ}}$ sont égaux.