∽ Brevet des collèges Aix-Marseille septembre 1967 ∽

ENSEIGNEMENT LONG ET ENSEIGNEMENT COURT

ALGÈBRE

On considère le polynôme en x :

$$P(x) = (m+1)x^2 + (2m-1)x + \frac{1}{4}(m+1),$$

où m est un paramètre, c'est-à-dire un nombre variable supposé connu.
Chaque fois que l'on remplace m par un nombre réel connu, le polynôme devient un polynôme dont les coefficients sont des nombres connus.

1. On pose

$$a = m+1, \quad b = 2m-1, \quad c = \frac{1}{4}(m+1).$$

a. Former l'expression en fonction de m de $b^2 - 4ac$.

b. Mettre cette expression sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré en m.

c. Pour quelles valeurs de m a-t-on $b^2 - 4ac = 0$?

2. En remplaçant dans $P(x)$ le paramètre m par chacune des valeurs trouvées précédemment, on forme deux polynômes à coefficients numériques.
Résoudre les deux équations obtenues en annulant ces polynômes.

GÉOMÉTRIE

On donne un cercle de centre O et de rayon R, le cercle étant ici l'ensemble des points M tels que OM = R, désigné par cercle (O), et un diamètre fixe [AB] de ce cercle.
À tout point M du cercle (O) (sauf au point A) on fait correspondre sur la demi-droite [AM) le point M′ défini par la relation

$$\overline{\text{AM}} \cdot \overline{\text{AM}'} = 6R^2.$$

Dans ce qui suit, le point M′ sera appelé l'image de M dans la correspondance considérée , ou, simplement, l'image de M.

1. Construire l'image B′ de B, c'est-à-dire le point B′ défini sur la droite AB par la relation

$$\overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{AB}'} = 6R^2.$$

2. **a.** M étant un point quelconque du cercle (O) et M′ étant son image, montrer que les quatre points M, M′, B et B′ sont sur un même cercle.

b. Quelle est la position de la droite M′B′ par rapport à la droite AB ?

On désigne la droite (M′B′) par (Δ).

c. Soit N un autre point quelconque du cercle (O) et N′ son image.

La droite (AN) rencontre (Δ) en N'_1.

Que peut-on dire du produit $\overline{\text{AN}} \cdot \overline{\text{AN}'_1}$?

Que peut-on dire des points N'_1 et N′ ?

Quel est l'ensemble des images de tous les points du cercle (A excepté) ?

3. **a.** Comparer les triangles AMN et AM′N′.

b. Montrer que l'on a $\dfrac{\text{M}'\text{N}'}{\text{MN}} = \dfrac{\text{AM}'}{\text{AN}}$.

c. En déduire que l'on a

$$\text{M}'\text{N}' = \text{MN} \times \frac{6R^2}{\text{AM} \times \text{AN}}$$

d. Le point M étant choisi de façon que l'on ait $\widehat{\text{MAB}} = 30°$, exprimer en fonction de R la longueur du segment [MB′].