Brevet des collèges Aix–Marseille septembre 1972

ALGÈBRE

1. On donne les deux polynômes suivants :

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x-1)^2-(x-3)^2 \text{ et}\\ B(x) &= (3x-4)^2-(3x-4)(x-1). \end{aligned}$$

Réduire et ordonner chacun d'eux suivant les puissances décroissantes de x.

2. Factoriser $A(x)$ et $B(x)$.

3. Soit la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.
Préciser le domaine de définition, puis simplifier cette fraction en indiquant dans quelles conditions cette simplification est possible.

4. Existe-t-il une valeur de x telle que $F(x) = -10$?

5. On donne les deux fonctions f et g, de **R** dans **R**, définies par

$$f(x) = y_1 = x+2 \quad \text{et} \quad g(x) = y_2 = 2x-3.$$

Étudier leurs variations et les représenter graphiquement dans un même repère orthonormé.
Peut-on utiliser le graphique pour résoudre l'équation $F(x) = 1$?

GÉOMÉTRIE

Un triangle quelconque (ABC) dont les trois angles sont aigus est inscrit dans un cercle de centre O.
On appelle respectivement A$'$, B$'$ et C$'$ les pieds des hauteurs sur les côtés [BC], [CA] et [AB] et l'on désigne l'orthocentre par H.
(B$'$C$'$) coupe le cercle en U et V, le point U étant sur le petit arc $\widehat{\text{AB}}$.

1. Comparer $\widehat{\text{ABC}}$ et $\widehat{\text{AB}'\text{C}'}$ et l'angle aigu formé par (AC) et la tangente en A au cercle.
Démontrer que celle-ci est parallèle à (B$'$C$'$), que (OA) est perpendiculaire à (B$'$C$'$) et que le triangle (AUV) est isocèle.

2. Démontrer que les triangles (AUB) et (AUC$'$) sont semblables.
En déduire les relations suivantes :

$$\text{AU}^2 = \text{AV}^2 = \text{AB}\cdot\text{AC}' = \text{AB}'\cdot\text{AC}.$$

3. Soit P le point commun à (B$'$C$'$) et à (BC) ; la droite (AP) recoupe le cercle en K.
Démontrer que les quatre points B, C, B$'$ et C$'$ appartiennent à un même cercle et que les cinq points H, A, K, B$'$ et C$'$ appartiennent à un autre cercle, dont on précisera le centre.