Brevet des collèges Amiens juin 1973

Exercice 1

Soit les deux fonctions polynômes f et g, applications de **R** dans **R** définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x-1)^2-25 \text{ et}\\ g(x) &= (2x-3)^2+8x^2-18. \end{aligned}$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$, puis $g(x)$.
2. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré au plus.
3. Déterminer l'ensemble, E, des valeurs réelles de x pour lesquelles on peut calculer le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
   Montrer que les fonctions rationnelles :
   $$\begin{array}{rcll} q: & E & \to & \mathbf{R}\\ & x & \longmapsto & q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$
   et
   $$\begin{array}{rcll} q': & E & \to & \mathbf{R}\\ & x & \longmapsto & q(x)=\dfrac{8(x+1)}{3(2x+1)} \end{array}$$
   sont égales.
4. Quelles sont les images par q' des réels 0 et $\dfrac{1}{2}$?
5. Pour quelles valeurs de t a-t-on
   $$q'(x)=-2,\quad q'(x)=\frac{1}{2}\quad \text{et}\quad q'(x)=0\,?$$

Exercice 2

Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C de coordonnées respectives $(0, -3)$, $(3 ; 0)$ et $(-3 ; 0)$.

1. Placer les points A, B et C. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ ainsi que les normes de ces vecteurs.
   Montrer que le triangle (A, B, C) est rectangle et isocèle.
2. Soit D le point de coordonnées $(0 ; 3)$.
   Préciser la nature du quadrilatère (A, B, D, C).
   Il existe un point M, dont on calculera les coordonnées $(x~;~y)$, tel que. l'on ait
   $$\overrightarrow{\text{MA}}+2\overrightarrow{\text{MB}}=\overrightarrow{\text{MC}}.$$
   Montrer que M, B et D sont alignés et placer le point M sur la figure.

3. On considère les droites (Δ) et (Δ') dont les équations, relativement au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, sont respectivement $x+y+3=0$ et $-x+y+3=0$.

   Vérifier que chacune de ces droites passe par deux des quatre points A, B, C et D.

4. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & (x\,;\,y) & \longmapsto & f(x\,;\,y)=(y+3)^2-x^2. \end{array}$$

   Factoriser $f(x\,;\,y)$.

   En déduire que l'ensemble, E, des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont telles que $f(x\,;\,y)=0$ est l'union de deux droites, que l'on précisera.