Brevet des collèges Amiens septembre 1973

ALGÈBRE

1. On considère les fonctions polynômes A, B et C, applications de **R** dans **R** définies par

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & (2x+3)\left(16x^2-1\right)\\ B(x) & = & (6x+3)\left(4x^2-9\right)\\ C(x) & = & 6x^2-9x \end{array}$$

Décomposer $A(x), B(x)$ et $C(x)$ chacun en un produit de facteurs du premier degré au plus.

2. Quel est l'ensemble, F, des valeurs de x pour lesquelles le quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ peut être calculé ?

Quel est l'ensemble, G, des valeurs de x pour lesquelles le quotient $\dfrac{6x^2-9x}{4x}$ peut être calculé ?

On considère alors les applications

$$f: \begin{array}{rcl} F & \to & \mathbf{R},\\ x & \longmapsto & \dfrac{A(x)}{B(x)} = f(x) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} G & \to & \mathbf{R},\\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{6x^2-9x}{4x} \end{array}$$

Simplifier les écritures de $f(x)$ et $g(x)$.

3. Pour quelles valeurs de x peut-on calculer le produit $p(x) = f(x) \times g(x)$?

4. On considère la fonction affine

$$h: \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R},\\ x & \longmapsto & 2x-1. \end{array}$$

Représenter graphiquement la fonction h dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Pour quelle valeur de x a-t-on $h(x) = 0$?

Calculer, pour la valeur trouvée, $f(x)$ et $g(x)$.

Pour quelle valeur de x a-t-on $h(x) = 1$?

Calculer, pour la valeur trouvée, $f(x)$ et $g(x)$.

GÉOMÉTRIE

Soit, dans un plan euclidien, (ABC) un triangle rectangle en A, (Δ) la parallèle menée par A à la droite (BC), (Δ') la parallèle menée par B à la droite (CA), (Δ'') la parallèle menée par C à la droite (AB).

On pose :

$$\{\text{J}\} = (\Delta') \cap (\Delta''), \quad \{\text{K}\} = (\Delta'') \cap (\Delta) \quad \text{et} \quad \{\text{L}\} = (\Delta) \cap (\Delta').$$

1. Démontrer l'équipollence des bipoints (B, C), (A, K) et (L, A).
2. On considère la médiatrice du segment [LK].
   Montrer que cette médiatrice est aussi la hauteur issue de A dans le triangle (ABC).
   On désigne par H la projection orthogonale de A sur (BC).
3. Soit H$'$ le symétrique du point H par rapport au point A.
   Démontrer que le quadruplet (H, K, H', L) définit un losange.
4. **a.** Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC).
   Montrer que J = S(K).
   b. Soit S' la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).
   Montrer que J = S'(L).
   c. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle (JKL) ? Justifier la réponse.

N. B. La quatrième question est indépendante des deuxième et troisième question.