Brevet Antilles–Guyane juin 1980

Algèbre

On considère les fonctions polynômes f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2-25\right)-(2x-10)\left(3x+\frac{7}{2}\right).\\ g(x) &= (x+1)^2-9(x-3)^2. \end{aligned}$$

1. Factoriser les polynômes $f(x)$ et $g(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$f(x)=0; \qquad g(x)=0; \qquad f(x)=g(x).$$

2. Déterminer les réels $f(0)$; $f(5)$; $g\left(3+\sqrt{3}\right)$.
Sachant que $1,732<\sqrt{3}<1,733$, donner un encadrement du réel $g\left(3+\sqrt{3}\right)$.

3. On définit la fonction q telle que

$$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction q.
Montrer que dans $\mathcal{D}$, on a

$$q(x)=\frac{5x+2}{8(x-2)}.$$

4. Résoudre l'équation $q(x)=1$.

Géométrie

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on considère les points A, ,B et C. donnés par leurs coordonnées :

$$\text{A}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right), \qquad \text{B}\left(\frac{5}{2}\,;\,-3\right), \qquad \text{C}\left(-\frac{3}{2}\,;\,0\right)$$

1. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
En déduire. la nature du triangle (A, B, C).

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$ contient les milieux I et J des bipoints (A, B) et (B, C).
Représenter cette droite dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

3. Déterminer les coordonnées du point K tel que le quadrilatère (A, C, K, I) soit un carré.
Démontrer que les points K, I et J sont alignés.

4. Soit H le point de la droite (D) qui a même ordonnée que B.

   a. Calculer les coordonnées de H.

b. Trouver les coordonnées du milieu E du bipoint (C, H).

c. Démontrer que l'on a

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BK}}.$$

En déduire que les points B, K et E sont alignés.

5. Montrer que le triangle (H, B, C) est isocèle.
En déduire que les droites (KB) et (CD) sont orthogonales.