↫ Brevet Antilles–Guyane juin 1978 ↬

Algèbre

Soit A et B les fonctions polynômes suivantes :

$$\begin{array}{rccl} A: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 16x^2-9 \\ B: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (4x-3)^2-16x^2+9-(x-8)(4x-3) \end{array}$$

1. Développer, réduire et ordonner $B(x)$.
2. Mettre $A(x)$ et $B(x)$ sous forme de produits de facteurs.
3. En déduire les solutions de l'équation : $A(x) = B(x)$.
4. Soit F la fonction rationnelle définie par :

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{B(x)}{A(x)} \end{array}$$

   a. Quel est l'ensemble de définition de F ?
   b. Simplifier l'écriture de $F(x)$.
   c. Résoudre l'équation : $F(x) = 1$

5. Soit G la fonction rationnelle définie par : $G(x) = \dfrac{B(x)}{2-x}$.
   a. Simplifier l'écriture de $G(x)$ après avoir donné l'ensemble de définition de la fonction G.
   b. Représenter graphiquement la fonction G.
   c. Trouver si elles existent les solutions des équations :

$$G(x) = 3 \qquad ; \qquad G(x) = 5.$$

Géométrie

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\ ; \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}\ ; \qquad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 6\vec{\imath} + \frac{5}{2}\vec{\jmath}\,.$$

1. Déterminer les composantes et la norme des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
2. Soit ω le milieu de (A, C) . Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont orthogonaux puis déterminer les coordonnées du point D symétrique de B par rapport à ω.
   Quelle est la nature du quadruplet (A, B, C, D) ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{A}\omega}$.
On considère le point E tel que $t(\text{B}) = \text{E}$.
Déterminer les coordonnées de E.
Calculer $d(\text{A}, \text{E})$, $d(\text{D}, \text{E})$.
Quelle est la nature du triangle (A, D, E) ?
4. Montrez que ω appartient à la médiatrice de [BC].
Déterminer une équation de la droite (ωE).
5. Soit α l'écart angulaire en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\text{ACB}}$.
Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.