

∞ Brevet Athènes juin 1983 ∞

Exercice 1

Soit f et g les applications polynômes définies par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (5x+3)^2 - (2x-5)^2; \\ g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 49x^2 - 4 - (7x-2)(8x-2). \end{aligned}$$

1. Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x les deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$.
2. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
3. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $f(x) = g(x)$.
4. Soit h la fonction rationnelle, de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , définie par

$$h(x) = \frac{(7x-2)(3x+8)}{(7x-2)(-x+4)}.$$

Donner l'ensemble de définition E de cette fonction.

Simplifier $h(x)$ en précisant pour quelles valeurs de x la fraction simplifiée est la même que $h(x)$.

5. Le plan étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , construire les représentations graphiques D_1 et D_2 des applications affines f_1 et f_2 telles que

$$f_1(x) = 3x + 8 \quad \text{et} \quad f_2(x) = -x + 4.$$

6. Calculer les coordonnées du point A intersection de D_1 et D_2 .

Exercice 2

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B, C définis par

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{OC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

1. Calculer les composantes ou coordonnées de \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{BC} .
En déduire $d(A, B)$, $d(A, C)$ et $d(B, C)$.
Quelle est la nature du triangle ABC?
2. Soit D le point de coordonnées (5; 4).
Démontrer A est le milieu de (B, D).
Que représente la droite (AC) pour le segment [BD]?

3. Calculer les coordonnées de E milieu de (C, D).

Soit G le point du plan tel que $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Calculer les coordonnées de G.

4. Démontrer que B, G et E sont alignés.

5. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{11}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Montrer que B D et C appartiennent à un même cercle de centre L.