Brevet d'Études du Premier Cycle

Barcelone juin 1959

ALGÈBRE

Les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont perpendiculaires et, sur chacun d'eux, le segment représentant l'unité mesure 2 cm.
Les coordonnées d'un point sont mesurées avec le segment unité. On donne dans le plan des deux axes quatre points A, B, C, D, de coordonnées

$$A(2\,;\,1),\qquad B(3\,;\,3),\qquad C(-2\,;\,5),\qquad D(4\,;\,2)$$

$x'Ox$, axe des abscisses, $y'Oy$, axe des ordonnées.

1. Déterminer a et b pour que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ passe par A et B ; de la même façon, déterminer u et v pour que la droite (L) d'équation $y = ux + v$ passe par C et D.
2. Tracer (D) et (L) avec le plus grand soin et déterminer graphiquement, avec une erreur inférieure à 0,25 unité, les coordonnées du point commun M, Trouver les coordonnées de M par le calcul.
3. (D) coupe $y'Oy$ en R, $x'Ox$ en S ; (L) coupe $y'Oy$ en T.
   Calculer les coordonnées de ces points.
4. Montrer que (D) et (L) sont perpendiculaires.
   Calculer en unités carrées l'aire du quadrilatère OSMT.

GÉOMÉTRIE ET TRIGONOMÉTRIE

On donne un cercle (C) de diamètre [MN] et la droite (D) tangente en N à (C).
Les points P et Q sont, sur (C), de part et d'autre de [MN] ; les droites (MP) et (MQ) rencontrent (D) en P′ et Q′ respectivement,

1. De la comparaison des triangles MNP et MP′N, déduire la relation

   $$(1)\qquad \mathrm{P'N} = \mathrm{MN}\cdot\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PM}}$$

   Etablir de la même façon la relation

   $$(2)\qquad \mathrm{Q'N} = \mathrm{MN}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QM}}$$

   Compte tenu des expressions simples des produits $\mathrm{MP}\cdot\mathrm{MP'}$ et $\mathrm{MQ}\cdot\mathrm{MQ'}$, établir la similitude des triangles MPQ et MQ′P′ et la relation

   $$(3)\qquad \mathrm{P'Q'} = \frac{\mathrm{MN}^2\cdot\mathrm{PQ}}{\mathrm{PM}\cdot\mathrm{QM}}.$$

2. En utilisant les relations (1), (2) et (3) et le fait que $\mathrm{P'N} + \mathrm{NQ'} = \mathrm{P'Q'}$, établir la relation

   $$(4)\ \mathrm{MN}\cdot\mathrm{PQ} = \mathrm{PN}\cdot\mathrm{QM} + \mathrm{PM}\cdot\mathrm{QN},$$

3. Le triangle PMQ, dont l'angle en M est aigu, est inscrit dans un cercle de rayon R ; M′ est, sur ce cercle, diamétralement opposé à P ; comparer $\widehat{\mathrm{PMQ}}$ et $\widehat{\mathrm{PM'Q}}$; en déduire la relation

$$(5) \qquad \text{PQ} = 2R.\sin\widehat{\text{PMQ}}.$$

4. La figure est celle de la question 1. et l'on suppose que $\widehat{\text{PMQ}}$ est aigu : la mesure de $\widehat{\text{PMN}}$ est a degrés, celle de $\widehat{\text{QMN}}$ est b degrés.

Calculer, dans les triangles rectangles MPN et MQN, la longueur des côtés des angles droits en fonction de MN et des lignes trigonométriques de a et de b.

En utilisant les relations (4) et (5), établir la formule

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a.$$

N. B. - Les relations à établir étant fournies aux candidats, les notes seront attribuées en fonction de la rigueur des démonstrations. Les questions 1. et 3. sont indépendantes l'une de l'autre et indépendantes des deux autres questions.