Brevet Besançon juin 1978

Algèbre

On considère les applications f, g, h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+1)^2-(3x-5)^2,\\ g(x) &= 4x^2-25-(3x+1)(5-2x)-20x+50,\\ h(x) &= 4x^2-20x+25. \end{aligned}$$

1. **a.** Développer, réduire et ordonner f(x) et g(x).

   b. Montrer que h(x) est le carré d'un binôme du premier degré.

   c. Montrer que $f(x)$ et $g(x)$ peuvent s'écrire sous la forme

   $$f(x)=(5x-4)(6-x) \quad \text{et} \quad g(x)=(2x-5)(5x-4).$$

2. **a.** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes

   $$f(x)=0 \quad ; \quad g(x)=0 \quad ; \quad h(x)=1 \quad ; \quad f(x)=g(x).$$

   b. Les applications f, g et h, sont-elles des bijections ? Pourquoi ?

3. Soit t la fonction rationnelle définie par

   $$t(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

   a. Déterminer son domaine de définition E, puis simplifier $t(x)$ dans E.

   b. Calculer $t\left(\sqrt{5}\right)$ et donner de ce résultat la valeur approchée par défaut à 10^{-2} près, sachant que $2,236<\sqrt{5}<2,237$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $t(x)>0$.

Géométrie

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}}=-\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{OB}}=3\overrightarrow{\imath}+3\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OC}}=2\overrightarrow{\imath}.$$

1. **a.** Faire la figure (unité : 1cm) et indiquer quelles sont les coordonnées des points A, B et C.

   b. Calculer les coordonnées du point M, milieu de [AB].

2. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadruplet (A, B, C, D) soit un parallélogramme.
3. Montrer que la droite (CM) est la médiatrice du segment [AB].
4. **a.** Calculer les coordonnées du point E, symétrique de C par rapport à M.

   b. Montrer que le quadruplet (A, E, B, C) est un carré.

   c. Montrer que les points D, O et B sont alignés.