

œ Brevet des collèges Besançon juin 1974 œ

ALGÈBRE

On considère les fonctions polynômes f , g et h de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telles que

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x + 3, \\g(x) &= x^2, \\h(x) &= (2x + 3)(x - 5) + 4x^2 - 9.\end{aligned}$$

1. Déterminer les fonctions A , B , C et D telles que

$$\begin{aligned}A(x) &= f(x) + h(x), & B(x) &= f(x) \times g(x), \\C(x) &= (f \circ g)(x) \text{ et } & D(x) &= (g \circ f)(x).\end{aligned}$$

Écrire $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$ sous forme de polynômes réduits et ordonnés.

2. Calculer $A\left(\frac{1}{5}\right)$, puis calculer $B(\sqrt{2})$ et $C(\sqrt{3} - 1)$.
3. Factoriser $h(x)$, puis résoudre dans \mathbf{R} l'équation

$$h(x) = 0.$$

4. On considère la fonction rationnelle q telle que

$$q(x) = \frac{h(x)}{(3x + 5)^2 - (x + 2)^2}.$$

Quel est l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction q ?

Dans cet ensemble \mathcal{D} , simplifier l'expression $q(x)$, puis résoudre l'équation

$$q(x) = 2.$$

GÉOMÉTRIE

Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , le point A a pour couple de coordonnées $(0; -1)$ et le point $C(2; 0)$.

Soit B et D deux autres points du plan (P) tels que

$$\overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OD} = -3\overrightarrow{OC}$$

- Calculer $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}$ et $\frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OC}}$ et en déduire que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.
- Retrouver le résultat précédent en évaluant le vecteur \overrightarrow{BD} en fonction du vecteur \overrightarrow{AC} .
- Soit M le milieu du bipoint (B, D) et N celui du bipoint (A, C) .
Quelles sont les coordonnées de M et de N ?
Montrer que $\overrightarrow{OM} = -3\overrightarrow{ON}$.
Que peut-on dire des points O , M et N ?
- Soit H la projection orthogonale du point O sur la droite (BD) .
Calculer les distances $d(B, D)$ et $d(B, H)$.
Montrer que la droite (OH) est aussi une hauteur du triangle (O, A, C) .