Brevet Besançon juin 1979

ALGÈBRE

Soit les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (3x+2)^2-(2x+3)^2, \\ g(x) & = & x^2-2x+1. \end{array}.$$

1. Mettre $f(x)$ sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3. Les fonctions rationnelles q et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies par

   $$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{et} \qquad h(x)=\frac{5(x+1)}{x-1}$$

   sont-elles égales ?
4. Calculer $h\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ et $h(2,3)$.

   Donner à ce dernier nombre une valeur approchée à 10^{-2} près par excès.
5. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations.

   $$h(x)=0 \qquad \text{et} \qquad h(x)=1.$$

GÉOMÉTRIE

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et C définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(-3\,;\,0), \qquad \text{B}(-6\,;\,-3) \quad \text{et} \quad \text{C}\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right).$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

   Montrer que l'on peut écrire $\overrightarrow{\text{AB}}$ sous la forme $k\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$ $(k\in\mathbb{R})$.

   Que peut-on en déduire pour A, B et C ?
2. Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadruplet (C, O, B, D) soit un parallélogramme.

   Déterminer les coordonnées du point M, centre de symétrie de ce parallélogramme.
3. Calculer les distances $d(\text{O}, \text{C})$, $d(\text{O}, \text{D})$ et $d(\text{C}, \text{D})$.

   En déduire la nature du triangle (O, C, D).
4. Démontrer que le triangle (A, D, C) est rectangle en A.

   En déduire que les points A, O, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   Construire ce cercle sur une figure.
5. Calculer la tangente de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{OMC}}$.