∽ Brevet des collèges Besançon juin 1955 ∽
Enseignement long et enseignement court

ALGÈBRE

Soit OAB un triangle rectangle en O.
OA = 12 cm, OB = 5 cm.
Un point M situé sur le segment [OA] est défini par AM = x.
On appelle [MN] le segment parallèle à (OB), N étant sur (AB), et (NP) la parallèle à OA, P étant sur [OB].

1. Évaluer, en fonction de x, MN, NP puis le demi-périmètre y = MN + NP du rectangle OMNP.
2. Représenter graphiquement la variation de y en fonction de x, lorsque M décrit le segment [OA].

   Quelles sont les limites de y ?
3. Trouver, graphiquement et par le calcul, la valeur de x lorsque $y = \dfrac{27}{4}$.

GÉOMÉTRIE

1. Soient ABC un triangle équilatéral de côté 6 cm et ($\mathscr{C}$) son cercle circonscrit, de centre O, dont on calculera le rayon R.
2. Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ du cercle ($\mathscr{C}$).

   Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{\text{BMC}}$?

   Montrer que la bissectrice intérieure de $\widehat{\text{BMC}}$ passe, quel que soit le point M, par un point fixe et qu'il en est de même pour sa bissectrice extérieure.
3. Soient H l'orthocentre du triangle BMC (point d'intersection des hauteurs) et K le point où se coupent les perpendiculaires (BK) à (BM) et (CK) à (CM).

   Quelle est la nature du quadrilatère BHCK ?

   Montrer que K est sur le cercle ($\mathscr{C}$) et indiquer la position relative des points M, O, K.
4. Lorsque M décrit l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$, quel est le lieu géométrique du point K ?

   Montrer que le milieu du segment [HK] est un point fixe.

   Déduire le lieu géométrique du point H, du lieu de K.