Brevet Besançon juin 1977

Algèbre

Partie I

Considérons les deux applications f, g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 9x^2 - 30x + 25 - (8-3x)(6x-10) \\ g(x) &= 9x^2 - 25. \end{aligned}$$

1. Factoriser $f(x)$.
2. Calculer $g\left(\sqrt{5}-3\right)$; $g\left(\dfrac{5}{3}\right)$.
3. **a.** Déterminer les réels, s'ils existent, qui ont comme image 0 par l'application g.
   b. Déterminer les réels, s'ils existent, qui ont comme image 11 par l'application g.
   c. L'application g est-elle une bijection ?

Partie II

Soit A la fonction qui au réel x associe :

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de A puis simplifier $A(x)$.
2. Calculer $A\left(\sqrt{3}\right)$ et sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donne un encadrement de $A\left(\sqrt{3}\right)$ à 10^{-1} près.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 9x-21 & < & 0 \\ 3x+5 & > & 0 \end{array}\right.$$

   et en déduire le signe de $A(x)$ si $-\dfrac{5}{3} < x < \dfrac{7}{3}$.

Géométrie

Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C tels que :

$$\overrightarrow{\text{OA}} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}\,; \qquad \overrightarrow{\text{OB}} = -\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}\,; \qquad \overrightarrow{\text{OC}} = 5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}\,.$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ et en déduire que les points A, B, C sont alignés.
2. Soit D le point du plan défini par :

$$\overrightarrow{\text{OD}} = \overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}.$$

   Calculer les coordonnées de D et la norme du vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$.

3. Calculer la distance de O à A, la distance de O à D et déterminer la nature du triangle (A, O, D).
4. Calculer les coordonnées de E, centre du cercle circonscrit au triangle (A, O, D).
5. Construire le point F du plan tel que (A, D, O, F) soit un parallélogramme et montrer que B, O, F sont trois points alignés.
6. G est le point d'intersection des droites (AB) et (OD), montrer que les droites (EG) et (BD) sont parallèles.