∾ Brevet Bordeaux juin 1957 ∾

ALGÈBRE

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
Un point A placé sur l'axe $x'\mathrm{O}x$ a pour abscisse $x = -1$; un point B placé sur l'axe $y'\mathrm{O}y$ a pour ordonnée $y = +2$.
La perpendiculaire en B à la droite (AB) coupe l'axe $x'\mathrm{O}x$ en C ; la perpendiculaire en C à la droite (BC) coupe l'axe $y'\mathrm{O}y$ en D ; la perpendiculaire en D à la droite (CD) coupe l'axe $x'\mathrm{O}x$ en E.

1. Quelles sont les coordonnées des trois points C, D, E et les longueurs des côtés du quadrilatère BCDE ? (L'unité de longueur choisie sur chaque axe est le centimètre.)
2. Quelles sont les équations des droites (BE) et (CD) et les coordonnées de leur point d'intersection I ?
3. La droite (OI) rencontre les droites (BC) et (DE) respectivement en J et K.

   Calculer les coordonnées de ces deux points et préciser leurs positions sur les segments [BC] et [DE].

GÉOMÉTRIE

Soit un cercle de centre O et de rayon R.
Deux cordes parallèles de ce cercle sont situées d'un même côté du centre : l'une, [AB], est égale au côté du triangle équilatéral inscrit, l'autre, [D$'$D], est égale au côté du carré inscrit, les points A et D$'$ étant placés d'un même côté de la médiatrice commune des deux cordes.

1. Donner une construction précise de la figure et calculer en fonction de R la hauteur du trapèze isocèle AD$'$DB.
2. M désignant le milieu du segment [AB] et C la seconde intersection de la droite (D$'$M) et du cercle donné, on demande de préciser la nature du triangle MDD$'$, de montrer que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{CMD}}$ et que

$$\mathrm{MC} \times \mathrm{MD} = \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 = \frac{\mathrm{AB}^2}{4}.$$

3. Montrer que les trois triangles CMA, AMD et CBD sont semblables entre eux.

   En déduire que dan le quadrilatère convexe ACBD le produit de deux côtés opposés est égal au demi-produit des diagonales.