

∞ Brevet Caen juin 1979 ∞

Algèbre

On considère les deux fonctions polynômes f et g définies, dans \mathbb{R} , par

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x+1)^2(3x-1)^2 - 4(3x+1)^2, \\g(x) &= 9x(3x+2)(2x-5)(x+1) + 3(x+1)(2x-5).\end{aligned}$$

1. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme d'un produit de fonctions polynômes de degré au plus égal à un.
2. Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations

$$f(x) = 0 \quad \text{puis} \quad g(x) = 0.$$

3. On considère la fonction rationnelle q définie par

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_q de la fonction rationnelle q .

4. Simplifier dans \mathcal{D}_q l'écriture de $q(x)$.
5. Calculer, si elles existent, les images par q des réels -6 , 0 et $-\frac{1}{3}$.
6. Résoudre dans \mathcal{D}_q les équations suivantes :

$$q(x) = \frac{3}{2} \quad \text{puis} \quad q(x) = 0.$$

Géométrie

1. Dans un plan euclidien (P) muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , placer les points A, B et C définis par

$$\vec{OA} = 10\vec{j}, \quad \vec{OB} = -5\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{OC} = 5\vec{i} + 5\vec{j}.$$

2. Quelle est la nature du triangle (A, B, C) ?
3. Calculer les coordonnées du point D du plan tel que le quadruplet (A, B, C, D) soit un losange.
4. Soit I le centre du losange; calculer $d(A, I)$.
On désigne par u l'écart angulaire en degrés de l'angle géométrique \widehat{ABI} .
Sachant que $3,162 < \sqrt{10} < 3,163$, calculer $\sin u$ et en déduire la valeur approchée par défaut de u à un degré près.
5. Soit E le point défini par $\vec{OE} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$

- a. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AE} sont orthogonaux.
 - b. Calculer $d(B, E)$.
 - c. En déduire que E est l'image de A dans la symétrie orthogonale par rapport à (BC).
6. On pose $(AD) \cap (BE) = \{F\}$.
Montrer que B est le milieu de [F, E].
En déduire les coordonnées de F.
7. Montrer que les points F, A, C et E appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.