∽ Brevet Caen juin 1980 ∾

Algèbre

On considère les deux fonctions polynômes f et g définies par

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (5x-4)^2-(2x+1)^2, \\ g: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (3x-5)^2-(3x-5)(2x-7). \end{array}$$

1. Montrer que $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes de degré deux.
2. Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme de produits de polynômes de degré un.
3. **a.** Calculer $f(-2)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
4. On considère les fonctions polynômes P et Q définies par

$$\begin{array}{lll} P(x) & = & (3x-5)(7x-3), \\ Q(x) & = & (3x-5)(x+2). \end{array}$$

Soit h la fonction rationnelle définie par

$$\begin{array}{llll} h: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{array}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction rationnelle h.

b. Simplifier dans $\mathcal{D}_h$ l'écriture de $h(x)$.

c. Calculer $h\left(\sqrt{5}\right)$ et exprimer le résultat sous la forme

$$h\left(\sqrt{5}\right) = a + b\sqrt{5} \text{ avec } \quad a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}.$$

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$h(x) = 0 \quad \text{puis} \quad h(x) = \frac{26}{11}.$$

Géométrie

Dans tout le problème, si M et N sont deux points du plan euclidien, on notera MN le nombre réel d(M, N).
Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{\text{OB}} = 4\vec{\imath}, \qquad \overrightarrow{\text{OC}} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}.$$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.
2. Montrer que le triangle (A, B, C) est rectangle en B.

3. On considère l'application S de (P) dans (P) qui à tout point M de coordonnées x et y dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ associe le point $\mathrm{M}' = S(\mathrm{M})$ de coordonnées x' et y' telles que

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y \quad \text{et} \\ y' & = & x. \end{array}$$

On pose $\mathrm{A}' = S(\mathrm{A})$, $\mathrm{B}' = S(\mathrm{B})$, $\mathrm{C}' = S(\mathrm{C})$.

a. Déterminer les coordonnées des points A′, B′ et C′.

b. Montrer que l'ensemble des points du plan invariants par S est la droite (Δ) dont une équation est $x - y = 0$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

(L'ensemble des points du plan invariants par S est l'ensemble des points N du plan tels que $S(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$).

c. Soit M le point du plan défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\ (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x \neq y).$$

On pose $\mathrm{M}' = S(\mathrm{M})$.

Montrer que (Δ) est la médiatrice du segment $[\mathrm{M}, \mathrm{M}']$.

En déduire la nature de l'application S.

4. Montrer que le triangle $(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$ est rectangle en B′,

5. Soit u l'écart angulaire en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

Calculer $\tan u$ et en déduire la valeur approchée par défaut de u à un degré près.