∽ Brevet Caen juin 1981 ∾

ALGÈBRE

Soit T l'ensemble des triangles isocèles dont la base mesure 8 cm, x désigne la mesure, en centimètres, de chacun des côtés isométriques, $p(x)$ désigne la mesure, en centimètres, du périmètre du triangle.

1. **a.** Compléter Je tableau suivant sachant que t_1, t_2, t_3 et t_4 sont des éléments de T.

	x	$p(x)$
triangle t_1	5	
triangle t_2	$4\sqrt{2}$	
triangle t_3		24
triangle t_4		$10+4\sqrt{3}$

   b. Montrer que le triangle t_2 est rectangle et que le triangle t_3 est équilatéral.

2. **a.** Exprimer $p(x)$ en fonction de x.

   b. On considère l'application

$$p: \begin{array}{lcl}]4\,;\,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & p(x). \end{array}$$

   Justifier le choix de l'intervalle $]4\,;\,+\infty[$ et donner une représentation graphique de l'application p dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

GÉOMÉTRIE

Dans un plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,; \qquad \overrightarrow{\text{OB}} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}\,; \qquad \overrightarrow{\text{OC}} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,:$$

on complétera la figure tout au long de l'exercice.

1. **a.** Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$, les distances OA et OB et montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OA}}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}$ sont orthogonaux.

   b. En déduire la nature du quadrilatère (O, A, C, B).

2. À tout réel a, on fait correspondre le point M_a tel que

$$\overrightarrow{\text{OM}_a} = 3a\vec{\imath} + (a-5)\vec{\jmath}\,.$$

   a. Vérifier que les coordonnées des points M_0 et M_1 sont

$$\text{M}_0(0\,;\,-5) \qquad \text{et } \text{M}_1(3\,;\,-4)$$

   b. Vérifier que $\overrightarrow{\text{M}_0\text{M}_1} = \overrightarrow{\text{OC}}$.

3. **a.** Montrer que, quel que soit le réel $a\,(a \neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{M_0M_1}} = a \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

Que peut-on en déduire ?

b. Déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par $\mathrm{M_0}$ et $\mathrm{M_1}$.

4. Soit D, le symétrique du point $\mathrm{M_0}$ par rapport à O.

a. Montrer que les points O et M, appartiennent à la droite (AB).

b. Montrer, sans calcul, que les droites (Δ) et (AB) sont perpendiculaires.

c. En déduire Je centre du cercle circonscrit au triangle $(\mathrm{D}, \mathrm{M_0}, \mathrm{M_1})$.