

œ Brevet Caen septembre 1980 œ

Algèbre

par

Soit f et g les fonctions polynômes définies, dans \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-4)^2 - (x-5)^2 \\ g(x) &= \left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

1. Écrire f sous la forme d'un produit de fonctions polynômes de degré au plus égal à 1.
2. Montrer que $f(x)$ est un polynôme de degré 2.
3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = -9.$$

4. Démontrer que pour tout réel a :

$$f(1-a) = f(1+a).$$

5. Montrer que $g(x)$ est un polynôme de degré 2.
6. Montrer que $f(x) = 25g(x)$.
7. Utiliser les résultats précédents pour écrire g sous la forme d'un produit de fonctions polynômes de degré au plus égal à 1 et pour résoudre l'équation

$$g(x) = 0.$$

8. a étant un réel quelconque, comparer

$$g(1+a) \text{ et } g(1-a).$$

Géométrie

Dans le plan euclidien, on considère un triangle équilatéral (A, B, C) tel que $d(A, B) = a$.
Soit H la projection orthogonale du point A sur la droite (BC) .

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure du problème.
2. Calculer $d(A, H)$ en fonction de a .
3. On considère les axes notés \mathcal{A} et \mathcal{B} portés respectivement par les droites (BC) et (HA) .
L'axe \mathcal{A} est muni du repère (H, \vec{i}) et l'axe \mathcal{B} du repère (H, \vec{j}) tels que :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| \quad \text{et} \quad \vec{i} = \overrightarrow{HC}$$

De plus \vec{j} a le même sens que \overrightarrow{HA} .

Dans le repère (H, \vec{i}, \vec{j}) montrer que les points A, B et C ont pour coordonnées respectives

$$A(0; \sqrt{3}); \quad B(-1; 0); \quad C(1; 0).$$

4. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CA} .
5. Calculer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle (A, B, C).
Rappel : G est le point d'intersection des trois médianes du triangle (A, B, C).
6. Dans le repère (H, \vec{i}, \vec{j}) , calculer les coordonnées du point D tel que (A, B, C, D) soit un parallélogramme.
Préciser la nature de ce parallélogramme en justifiant votre réponse.
7. Démontrer que les points B, G et D sont alignés.
8. Déterminer une équation de la droite (AC) et une équation de la droite (BD).