∽ Brevet Cameroun juin 1983 ∾

Exercice 1

On définit, dans $\mathbb{R}^*$, la loi de composition interne suivante :

$$\forall (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^{*2}, \quad x * y = \frac{x}{y^2}$$

1. **a.** Cette loi est-elle commutative ?
   b. Cette loi est-elle associative ?
2. Soit x un réel donné. Calculer $x * 1$.
   1 est-il élément neutre pour la loi $*$?
3. Résoudre, dans $\mathbb{R}^*$, les équations suivantes :
   a. $x * 1 = 1$;
   b. $1 * x = 1$;
   c. $x * x = -x$.
4. Calculer les réels suivants :
   a. $A = \left(1+\sqrt{3}\right) * \sqrt{2-\sqrt{3}}$,
   $B = \left(1-\sqrt{3}\right) * \sqrt{2+\sqrt{3}}$,
   $C = A - B$.
   (On rendra dans chaque cas les dénominateurs rationnels.)
   b. Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donner un encadrement de C à 10^{-2} près.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

1. Déterminer l'ensemble E des réels pour lesquels $f(x)$ existe.
2. **a.** Étudier selon les valeurs du réel x, le signe de l'expression $\dfrac{1-x}{x}$.
   b. En déduire les solutions dans E de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 3

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit

$$\text{A}(1\ ;\ -2), \quad \text{B}(0\ ;\ 4), \quad \text{C}(-3\ ;\ -1) \quad \text{et} \quad \text{D}(1\ ;\ 8)$$

des points du plan $\mathscr{P}$.

Partie A

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que le quadruplet (A, C, B, E) soit un parallélogramme.
2. Montrer que E appartient à la médiatrice de [AD].

Partie B

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M$'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' & = & -x+2\\ y' & = & -y-4.\end{array}\right.$$

1. Déterminer les images A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ par f des points A, B, C, D.
2. Déterminer l'ensemble J des points M tels que $f(\text{M}) = \text{M}$.
3. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{\text{AM}'} = -\overrightarrow{\text{AM}}$.
   En déduire la nature de l'application.
4. Soit Δ la droite d'équation $x+4y+7=0$.
   a. Montrer que A appartient à Δ.
   b. Déterminer le point d'intersection de la droite Δ avec la droite d'équation $y+1=0$.
   c. Déterminer l'image de la droite (AC) par f.
5. **a.** Déterminer les coordonnées du point K de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{\text{KA}} + \overrightarrow{\text{KB}} = \overrightarrow{0}$.
   b. Quelles sont les coordonnées de K$'$ image par f de K?
   c. Calculer $\overrightarrow{\text{K}'\text{A}} + \overrightarrow{\text{K}'\text{B}'}$.
   Que représente K$'$ pour le bipoint (A, B$'$) ?