# ∽ Brevet Cameroun juin 1980 ∽

**ALGÈBRE**

**Exercice 1**

1. **a.** L'équation $3x = 2$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}$?

   **b.** Soit la proposition mathématique :

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad \exists z \in \mathbb{N}, \quad zy = 2.$$

   Donner sa négation. Laquelle des deux propositions est vraie ?

2. Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire dans un ensemble $E$.
   Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall (x,\ y) \in E^2, \quad (x\mathscr{R} \Rightarrow y\mathscr{R}x).$$

3. Soit $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$. Sur $E$, on définit la relation binaire « ... divise... », notée | par

$$\forall (x,\ y) \in E^2, \quad (x|y \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ y = k.x).$$

   **a.** Donner le graphe $G$ de cette relation.

   **b.** On admettra que cette relation est une relation d'ordre.
   6 et 8 sont-ils comparables ? Cette relation est-elle une relation d'ordre total ?

   **c.** Résoudre dans $E$ les équations suivantes :

$$x|6, \qquad 3|x.$$

   Indication : $x|y \iff (x, y) \in G$.

**Exercice 2**

Soit $f_m$ la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_m(x) = (2-m)x + m - 1$$

où $m$ est un réel donné.

**Partie A**

1. Déterminer $m$ pour que $f_m(2) = 4$.
2. Déterminer l'image de $1+\sqrt{2}$ par chacune des fonctions $f_3 \circ f_2$ et $f_{-2} \circ f_3$.
   Démontrer que

$$f_3 \circ f_{-2} = f_{-2} \circ f_3.$$

3. **a.** Déterminer $m$ pour que $f_m$ soit une fonction strictement croissante.

   **b.** Déterminer $m$ pour que $f_m$, soit une fonction constante.
   Quelle est la valeur de cette constante ?

**Partie B**

Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan.
À chaque valeur réelle de $m$ on associe la droite $(D_m)$ d'équation

$$y = (2-m)x + m - 1.$$

1. Quelle est l'intersection de la droite $(D_m)$ et de l'axe O$x$ ?
2. **a.** Représenter les droites $(D_{-2})$ et $(D_0)$.
   Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection I ?
   **b.** Démontrer que toutes les droites $(D_m)$ passent par I.

**Partie C**

Soit $S$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point $S(M)$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& y\\ y' &=& x.\end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer les images des points A$(0\,;\,-1)$, B$(2\,;\,5)$ et I$(1\,;\,1)$, et les placer dans le repère.
   **b.** Comparer $d(\mathrm{I}, \mathrm{A})$ et $d(S(\mathrm{I}), S(\mathrm{A}))$ d'une part, $d(\mathrm{I}, \mathrm{B})$ et $d(S(\mathrm{I}), S(\mathrm{B}))$ d'autre part.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tel que $M = S(M)$.
3. On suppose $m \neq 2$. Soit $M(x\,;\,y)$ un point de la droite $(D_m)$ définie en B.
   Quelle relation vérifient les coordonnées $(x'\,;\,y')$ de $S(M)$ ?
   En déduire l'image de la droite $(D_{-2})$ par $S$.