Brevet Clermont-Ferrand juin 1981

Algèbre

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = (x-1)(x-3) \quad \text{et} \quad g(x) = (2x+3)^2 - (x+4)^2.$$

1. Écrire $g(x)$ sous forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
2. Écrire $f(x)$ sous forme développée, réduite et ordonnée.
3. Calculer $f\left(1+\sqrt{3}\right)$.
   Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f\left(1+\sqrt{3}\right)$.
4. **a.** Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) + 1 = (x-2)^2.$$

   Utiliser ce résultat pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -1$.

   b. Montrer que l'inéquation $f(x) < -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points A, B et C définis par

$$\overrightarrow{\text{OA}} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{\text{OB}} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OC}} = -3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}.$$

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
   Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux.
   Préciser la nature du triangle (A, B, C).
3. Calculer les distances d(A, B) et d(B, C).
   α est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ACB}}$. Calculer $\tan\alpha$.
   En déduire la valeur approchée de α à 1° près par défaut.
4. Calculer les coordonnées du point I centre du cercle circonscrit au triangle (A, B, C).
   Calculer le rayon R de ce cercle et montrer que le point O appartient au cercle.
5. Quelle est la nature du quadrilatère (A, B, C, O) ?