Brevet des collèges Clermont juin 1975

I.

On donne la fonction rationnelle

$$q : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{\left(-x^2+18x-81\right)(-x+4)}{(2x-8)\left(9x^2+6x+1\right)} \end{array}$$

1. Mettre sous forme de produits de facteurs du premier degré, les polynôme du second degré figurant dans l'écriture de $f(x)$ ci-dessus.

2. **a.** Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

b. Pour tout x de D donner une écriture simplifiée de $f(x)$: soit $f_1(x)$.

c. Calculer, si elles existent, les images par f de 0 et 4.

3. **a.** Déterminer l'ensemble P des réels x tels que fI (x)   0 .

b. On considère la fonction numérique

$$q : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \sqrt{g_1(x)} \end{array}$$

Quel est l'ensemble de définition Δ de la fonction g ?

c. Pour tout x de Δ donner une écriture de $g(x)$ ne comportant pas de radical.

d. Calculer, si elles existent, les images par g de 0 et 4.

4. **a.** Étudier suivant les valeurs du réel x le signe de $(x-9)$ puis de $(3x+1)$.

En déduire le signe de l'expression $\dfrac{x-9}{3x+1}$ dans $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,9\right]$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,9\right]$ l'équation

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\dfrac{x-9}{3x+1}\right| = 1.$

Donner la solution sous forme d'un quotient dont le dénominateur est entier.

N. B. - La quatrième question est indépendante des trois autres.

II .

Dans le plan π rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer les points I, J, A, B tels que

$$\overrightarrow{\text{OI}} = \vec{\imath}, \quad \overrightarrow{\text{OJ}} = \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OA}} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{\text{OB}} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}.$$

1. Calculer les coordonnées du point C tel que (A, B, C, I) soit un parallélogramme.
   Calculer les coordonnées du point D symétrique du point A par rapport au point I.
2. Écrire une équation des droites (AB) et (CD).
   Calculer les coordonnées du point E intersection des droites (AB) et (CD).
   Montrer que C est le milieu du bipoint (E, D).
3. Montrer que (B, E, C, I) est un carré.
4. Calculer la tangente de l'écart angulaire α de l'angle géométrique $\widehat{\text{EBD}}$.
   Calculer, à l'aide des tables trigonométriques, cet écart angulaire à 1 minute près, par défaut.
   En déduire, à 1 minute près par excès, l'écart angulaire β de l'angle géométrique $\widehat{\text{EDB}}$