Brevet d'Études du Premier Cycle
Dijon juin 1954

ALGÈBRE

On donne les polynômes

$$\begin{aligned} A &= xy+y+x+1,\\ B &= -xy+y-x+1,\\ C &= -x^2y-x^2+y+1,\\ D &= x^2y+x^2+2xy+2x+y+1. \end{aligned}$$

1. On remplace y par $a-1$ (a nombre donné différent de + 1).
   Les polynômes A, B, C, D s'expriment alors en fonction de a et de x.
   Écrire ces expressions.
2. Exprimer le rapport $z = \dfrac{A}{B}$ et $z' = \dfrac{C}{D}$ en fonction de x seul.
   On trouvera $z = \dfrac{1+x}{1-x}$.
   Quelle relation a-t-on entre z et z' ?
   Cette relation est-elle valable pour toute valeur de x ?
3. On suppose que z a une valeur donnée m. Quelle est la valeur correspondante, x_1 de x ?
   Si z reçoit la valeur $\dfrac{1}{m}$, quelle est la valeur correspondante, x_2 de x ?
   Quelle relation existe-t-il entre x_1 et x_2 ?
   Application : $m = \sqrt{2}$.

GÉOMÉTRIE

On considère un losange OABC, tel que OA = a et $\widehat{\text{AOC}} = 60°$.

1. Montrer que le cercle circonscrit au triangle ABC est tangent à (OA) et à (OC).
   Déterminer son rayon en fonction de a.
2. Un point M décrit sur le cercle l'arc $\overset{\frown}{\text{AC}}$ inférieur à 180°.
   On trace la corde [MN] *parallèle* à [OC] et la corde [MP] *parallèle* à [OA].
   La corde [NP] varie en position. Que peut-on dire de sa longueur ?
   Quel est le lieu de son milieu, M′ ?
3. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{\text{N}}$ et $\widehat{\text{P}}$ du triangle MNP passent chacune par un point fixe.
   Le démontrer.
   Elles se coupent en I.
   Montrer que l'angle qu'elles forment est constant.
   Lieu du point I.
4. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\text{M}}$ du triangle MNP coupe le cercle ABC en F.
   Calculer à 1 mm^2 près, pour a = 3 cm, l'aire balayée par la corde [MF] lorsque M décrit $\overset{\frown}{\text{AC}}$.