∽ Brevet Dijon juin 1976 ∾

Algèbre

x désignant un nombre réel, on pose

$$\begin{array}{rcl} A &=& (7x-4)^2-(3x+2)^2,\\ B &=& (2x-3)\left(2x-\frac{3}{7}\right)+(3-2x)\left(x+\frac{18}{7}\right),\\ C &=& (7x-4)^2-(3x+2)^2-4(2x-3)\left(2x-\frac{3}{7}\right)-4(3-2x)\left(x+\frac{18}{7}\right)\end{array}.$$

1. Développer, réduire et ordonner A, B et C.
2. Mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré au plus (par rapport à x) : A, B et C.
3. Soit f la fonction rationnelle de la variable réelle x telle que

$$f(x)=\frac{8(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x-3)}.$$

Calculer, si elles existent, les images par f des réels suivants : 31

$$5\,;\quad \frac{3}{2}\,;\quad -\frac{1}{2}\quad \text{et}\quad 3.$$

4. Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)+8\left(1+\sqrt{2}\right)$.
Sachant que $1.414<\sqrt{2}<1,415$, établir les inégalités suivantes :

$$-19,32<f\left(\sqrt{2}\right)<-19,31.$$

Géométrie

Faire une figure (unité : 1 cm).

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C et D tels que

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{OB}=2\vec{\imath}-4\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{OC}=-2\vec{\imath}-\vec{\jmath},\quad \overrightarrow{OD}=6\vec{\imath}-2\vec{\jmath}.$$

1. Montrer que O est le milieu du bipoint (A, C).
2. Calculer la norme de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$.
En déduire que le triangle (A, B, C) est isocèle.
3. Montrer que (A, D, B. C) est un parallélogramme.
4. Soit M le milieu du bipoint (C, D).
Montrer que M est le centre du cercle passant par les points A, O et B.
5. Soit P le milieu du bipoint (B, D).
Montrer que le point M est le milieu du bipoint (O, P) et que (A, O, B, P) est un rectangle.