Brevet des collèges Dijon septembre 1975

Algèbre

1. Soit les fonctions polynômes f et g de la variable x, de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, données par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x-\sqrt{3}\right)^2+2\left(2x-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\\ g(x) &= 2x\left[(x+2)^2-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right]+x+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Développer et réduire $f(x)$.
Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de polynômes du premier degré.

2. On considère la fonction rationnelle p de la variable x, de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, donnée par :

$$p(x)=\frac{(2x+1)^2}{\left(x+\frac{7}{4}\right)(2x+1)}.$$

Calculer, si elles existent, les valeurs prises par $p(x)$ pour

$$x=0,5,\quad x=\frac{3}{4},\quad x=-3,75.$$

3. Construire dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy (unité : 2 cm) les représentations graphiques des deux fonctions affines de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$:

$$x\longmapsto 2x+1\quad\text{et}\quad x\longmapsto x+\frac{7}{4}.$$

Déterminer par le calcul les coordonnées de leur point d'intersection.

Géométrie

Faire une figure (unité : 1 cm).
Le plan est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On donne les points A, B, C tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-6\overrightarrow{\jmath},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=8\overrightarrow{\imath},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}=8\overrightarrow{\imath}+10\overrightarrow{\jmath}.$$

1. Soit M le milieu de (A,C).
Calculer la norme de chacun des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
Montrer que la droite (BM) est perpendiculaire à la droite (AC).

2. Soit le point J tel que $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BM}}$.

   W est la droite contenant J et parallèle à la droite (AC).

   Le point F est l'intersection de W et de la droite (BC).

   Le point E est l'intersection de W et de la droite (BA).

   Calculer les distances du point B aux points F et E.

   Montrer que J est le milieu de (E,F).

3. On appelle Q le milieu de (M, C) et P le milieu de (M, A).

   Montrer que la droite (EQ) est parallèle à la droite (BC) et que la droite (FP) est parallèle à la droite (BA).

4. Le point H est l'intersection des droites (EQ) et (FP).

   Montrer que (B, E, H, F) est un parallélogramme.

   Montrer que les points B, J, H sont alignés et que H est le milieu de (B, M).