∽ Brevet Dijon septembre 1978 ∾

Algèbre

Exercice 1

Soient les polynômes :

$$\begin{array}{rcl} A &=& (2x-4)(x+1)-x^2+2x-5(x-2)\\ B &=& (3x+1)^2-4(x+2)^2 \end{array}$$

1. Développer, réduire et ordonner A et B.
2. Mettre A et B sous forme d'un produit de polynômes de degré un au plus.

Exercice II

Soit la fonction affine f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = x-2.$$

Représenter graphiquement cette fonction dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy (unité = 1 cm).
En déduire la représentation graphique de la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = |x-2|$.
N. B. Utiliser une couleur différente pour le deuxième tracé dans le même repère.

Exercice III

Soit la fonction rationnelle g de la variable réelle x donnée par

$$g(x) = \frac{|x-2|}{5x+5}.$$

1. Calculer. si elles existent. les images des nombres réels :

$$-0,4\,;\quad 0\,;\quad \frac{1}{3}\,;\quad 2\,;\quad 2\sqrt{2}.$$

   Montrer que les quatre premiers résultats sont des nombres décimaux.
   Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1.415$, donner une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près du dernier résultat.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x+5 > 0$.
   En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x réel ayant une image par gS. Les trois parties sont indépendantes.

Géométrie

1. Dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy (unité = 1 cm), placer les deux points A et B de coordonnées :

$$\text{A}\,(8\,;\,0) \text{ et B}\,\left(2\,;\,2\sqrt{3}\right)$$

et montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 4 que l'on construira.

2. Calculer les distances $d(\mathrm{O, A})$ et $d(\mathrm{A, B})$.

Montrer que le triangle (A, O, B) est un triangle rectangle.

En déduire la position relative de la droite (A, B) et du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Soient D, le point diamétralement opposé à B sur le cercle $(\mathscr{C})$, et M et N les extrémité du diamètre de $(\mathscr{C})$ portés par $(\mathrm{O}y)$.

Quelle est la nature du triangle (D, M, N) ?

4. Soit I la projection orthogonale de O sur la droite (DN).

a. Montrer que I est le milieu du segment [D, N].

b. Construire le symétrique J du point I dans la symétrie centrale de centre O et montrer que J est le milieu du segment [M, B].

c. Montrer que les trois points M, J, B sont les images respectives des points D, I, N dans une même translation dont on donnera le vecteur $\overrightarrow{v}$ par ses coordonnées.