∾ Brevet Dijon septembre 1980 ∾

Algèbre

Partie I

1. Mettre sous la forme d'un produit de polynôme du premier degré chacun des polynômes suivants :

$$(2x+1)^2-(x-3)^2;\qquad (3x-2)^2-(3x-2)(4x-5).$$

2. Vérifier que le polynôme

$$(2x+1)^2-(x-3)^2+(3x-2)^2-(3x-2)(4x-5)$$

est un polynôme du premier degré.

Partie II

1. Mettre sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné le polynôme

$$(3x-2)(x+4)+(3x-2)(-x+3).$$

Résoudre, dans $/R$. l'inéquation

$$(3x-2)(x+4)+(3x-2)(-x+3)>0.$$

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$$x+4=-x+3\,;\,x+4=x-3.$$

En déduire les solutions de l'équation

$$|x+4|=|-x+3|.$$

Rappel : $|x+4|$ et $|-x+3|$ désignent respectivement les valeurs absolues de $x+4$ et de $-x+3$.

Partie III

Soit $\mathcal{D}$ la représentation graphique dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ de la fonction affine p donnée par

$$p(x)=x-3.$$

1. Faire une figure.
2. Soit les points A et B de $\mathcal{D}$ dont les abscisses sont respectivement $3+\sqrt{2}$ et $3+\sqrt{3}$.
   On considère le point M d'abscisse 4,526 et d'ordonnée 1,526.
   a. Démontrer que M est un point de $\mathcal{D}$.

b. Sachant que

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \quad \text{et} \quad 1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

justifier chacune des inégalités suivantes :

$$4,4 < 3+\sqrt{2} < 4,5; 4,7 < 3+\sqrt{3} < 4,8; 3+\sqrt{2} < 4,526 < 3+\sqrt{3}.$$

c. Démontrer que M est un point du segment [AB].

Géométrie

Dans un plan muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C, D et E tels que

$$\overrightarrow{\text{OA}} = 8\vec{\imath}\,; \quad \overrightarrow{\text{OB}} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}\,; \quad \overrightarrow{\text{OC}} = 6\vec{\imath} + 64\vec{\jmath}\,; \quad \overrightarrow{\text{OD}} = 10\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,; \quad \overrightarrow{\text{OE}} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,.$$

1. Soit I le milieu du segment [AB] calculer les coordonnées de I.
2. Démontrer que le triangle (B, A, D) est un triangle rectangle.
3. Démontrer que l'on a $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{DC}}$ et que (A, B, C, D) détermine un rectangle.
4. Démontrer que les points B et E sont les milieux respectifs des segments [EC] et [OB].
   Démontrer que (E, B, D, A) et (O, E, D, A) déterminent des parallélogrammes.
5. Soit $\mathscr{S}$ la symétrie centrale de centre I.
   a. Quelles sont les images par $\mathscr{S}$ des points E et B ?
   b. On appelle F l'image par $\mathscr{S}$ du point C.
   Démontrer que D, A et F sont alignés et que (E, F, D, C) détermine un carré.
   c. La droite parallèle à la droite (OA) menée par B coupe la droite (FD) au point H.
   Démontrer que l'image par $\mathscr{S}$ du point O est le point H.