Brevet des collèges Dijon juin 1974

ALGÈBRE

Partie A

1. Décomposer 7 056 en produit de facteurs premiers.
   En déduire que $\sqrt{7\,056} = 84$.
2. Résoudre dans **R** l'équation
$$x^2 = 7\,056.$$
3. Résoudre dans **R** l'équation
$$x^2 - 2x + 1 = 7\,056.$$
4. Résoudre dans **R** l'équation
$$x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 7\,056x.$$

Partie B

1. On considère le système d'équations suivant
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 2y &=& 4,\\ -2x + y &=& 9.\end{array}\right. .$$
   Soit E_1 l'ensemble des solutions dans $\mathbf{R}^2$ de la première équation et E_2 l'ensemble des solutions dans $\mathbf{R}^2$ de la deuxième équation.
   Montrer que
$$(4~;~-4) \in E_1 \quad \text{et} \quad (5~;~3) \notin E_2.$$
   Déterminer $E_1 \cap E_2$.
2. Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on considère les droites (D) et (L), d'équations respectives suivantes :
$$\begin{array}{lrcl} (D) & 3x + 2y - 4 &=& 0,\\ (L) & 2x - y + 9 &=& 0\end{array}$$
   a. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.
   b. Construire (D) et (L).

GÉOMÉTRIE

Dans un plan euclidien (P), l'unité de longueur étant 1 cm, on considère deux points distincts donnés A et B.
Soit I le milieu de (A, B) et H un point quelconque de la droite (AB).

A. Rappeler pourquoi on a le droit d'écrire
$\overline{\text{HA}} = \overline{\text{HI}} + \overline{\text{IA}}$, $\quad \overline{\text{HB}} = \overline{\text{HI}} + \overline{\text{IB}}$, $\quad \overline{\text{IA}} + \overline{\text{IB}} = 0$.
En déduire que l'on a

$$\text{HA}^2 - \text{HB}^2 = 2\overline{\text{IH}} \times \overline{\text{AB}}.$$

B. Soit M un point quelconque du plan se projetant orthogonalement en m sur la droite (AB). Montrer que, quel que soit M, élément de (P), on a

$$\text{MA}^2 = \text{M}m^2 + m\text{A}^2 \quad \text{et} \quad \text{MB}^2 = \text{M}m^2 + m\text{B}^2.$$

En déduire que, quel que soit M, élément de (P), on a

$$\text{MA}^2 - \text{MB}^2 = 2\overline{\text{I}m} \times \overline{\text{AB}}.$$

C. On suppose que la droite (AB) est support d'un axe tel que $\overline{\text{AB}} = 10$.

1. Démontrer que l'ensemble E, des points M du plan (P) tels que $\text{MA}^2 - \text{MB}^2 = 30$, est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C de la droite (AB) défini par

$$\overline{\text{IC}} = \frac{3}{2}.$$

2. Calculer $\overline{\text{AC}}$ et $\overline{\text{CB}}$.

D.

1. On suppose qu'il existe au moins un point D de E tel que

$$\text{DA}^2 + \text{DB}^2 = 100.$$

   a. Démontrer que, nécessairement, le triangle (A, B, D) est rectangle en D.

   b. En déduire que, nécessairement, on a

$$\text{CD} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

2. Déterminer l'ensemble F des points M de E tels que

$$\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = 100.$$