Durée : 2 heures

Brevet des collèges Groupement Est septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES **12 points**

Dans toute cette partie les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications, le barème en tiendra compte.

EXERCICE 1

On donne les expressions $A = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{7}{4}$ et $B = (-3) \div \frac{6}{7}$.
Calculer A et B en détaillant les étapes des calculs et écrire les résultats sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE 2

On donne les expressions $C = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)$ et $D = \sqrt{24} + \sqrt{9} + \sqrt{54}$.

1. Écrire C et D sous la forme $a + b\sqrt{6}$ où a et b sont des nombres entiers.
2. Utiliser les résultats de la première question pour comparer C et D.

EXERCICE 3

Soit l'expression : $E = (x+1)^2 + (x+1)(2x-3)$.

1. Développer puis réduire l'expression E.
2. Factoriser l'expression E.
3. Résoudre l'équation $(x+1)(3x-2) = 0$.

EXERCICE 4

Au rugby, un essai transformé permet d'augmenter le score de l'équipe de 7 points, un essai non transformé augmente le score de 5 points et une pénalité augmente le score de 3 points.
Si, par exemple, au cours d'un match, l'équipe de France marque 4 essais transformés, 2 essais non transformés et 3 pénalités, le nombre de points marqués par la France est : $4 \times 7 + 2 \times 5 + 3 \times 3 = 47$.

1. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcr} x + y & = & 7 \\ 7x + 5y & = & 39 \end{array}\right.$
2. Lors d'une autre rencontre, l'équipe de France a marqué 7 essais, certains transformés et d'autres non et 2 pénalités pour un total de 45 points.

   Déterminer le nombre d'essais transformés et le nombre d'essais non transformés marqués par l'équipe de France au cours de ce match.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité est le centimètre.

1. Placer les points A$(-2\ ;\ 1)$; B$(3\ ;\ 6)$; C$(4\ ;\ -1)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Montrer que l'on a : $AB = 5\sqrt{2}$.
4. Montrer que le triangle ABC est isocèle de sommet B.
5. **a.** Construire le point D tel que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

   b. Quelle est la nature du quadrilatre ABCD ? (justifier la réponse)

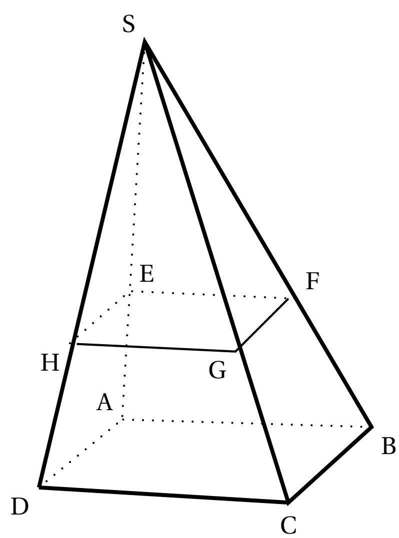
EXERCICE 2
ABC est un triangle rectangle en A tel que : BC = 12 et AC = 6.
(L'unité de longueur est le centimètre).

1. Construire le triangle ABC.
2. Montrer que l'on a : $AB = 6\sqrt{3}$.
3. Calculer $\sin\widehat{ABC}$; en déduire la mesure exacte, en degrés, de l'angle $\widehat{ABC}$.
4. On considère le point M du segment [AB] et le point N du segment [BC] tels que : $BM = 4\sqrt{3}$ et $BN = 8$.

   a. Placer les points M et N.

   b. Utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour montrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

EXERCICE 3
La figure ci-contre représente une pyramide $\mathscr{P}$ de sommet S.
Sa base est un carré ABCD tel que : AB = 6 cm ; sa hauteur [SA] est telle que : SA = 9 cm.



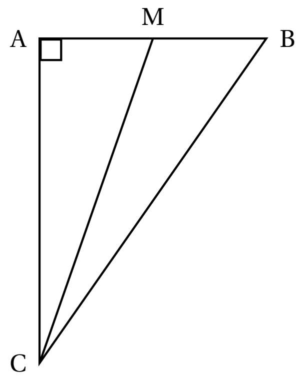
1. Calculer le volume de cette pyramide $\mathscr{P}$.
2. E est le point de [SA] défini par SE = 6 cm ; EFGH est la section de la pyramide $\mathscr{P}$ par un plan parallèle à sa base ; la pyramide $\mathscr{P}_1$, de sommet S et base EFGH est donc une réduction de la pyramide $\mathscr{P}$; calculer le coefficient k de cette réduction.
3. Calculer le volume de la pyramide $\mathscr{P}_1$.

PROBLÈME

Monsieur Jean possède un terrain qu'il souhaite partager en deux lots de même aire. Ce terrain a la forme d'un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 50 m et AC = 80 m.

1. **a.** Calculer l'aire du triangle ABC.

b. En déduire que l'aire de chaque lot doit être de 1 000 m^2.



2. Dans un premier temps, il pense faire deux lots ayant la forme de deux triangles AMC et BMC comme indiqué sur la figure ci-contre.
On pose A$M = x$.

a. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle AMC.

b. En déduire que l'aire du triangle BMC est égale à
$2000 - 40x$.

c. Déterminer x pour que les aires des deux triangles AMC et BMC soient égales.

d. Quelle est alors la position du point M sur le segment [AB] ?

3. On considère les deux fonctions affines f et g définies par

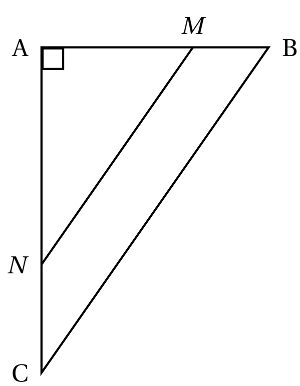
$$f(x) = 40x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2000 - 40x.$$

Sur une feuille de papier millimétré, construire un repère orthogonal :

- l'origine sera placée en bas à gauche,
- sur l'axe des abscisses, on prendra 1 cm pour 5 unités (1 cm pour 5 m),
- sur l'axe des ordonnées, on prendra 1 cm pour 100 unités (1 cm pour 100 m^2).

a. Dans ce repère, représenter graphiquement les fonctions affines f et g pour $0 \leqslant x \leqslant 50$.

b. En utilisant ce graphique, retrouver le résultat de la question **2. c.**.



4. Finalement, Monsieur Jean se décide à partager son terrain en un lot triangulaire AMN et un lot ayant la forme d'un trapèze BMNC comme indiqué sur la figure ci-contre avec (MN) parallèle à (BC).
On pose A$M = x$.

a. En utilisant la propriété de Thalès, exprimer AN en fonction de x.

b. En déduire que l'aire du triangle AMN est égale à x^2.

5. Le graphique suivant représente l'aire en m^2 du triangle AMN exprimée en fonction de x.

En utilisant ce graphique, déterminer x, à un mètre près, pour que les aires des deux lots AMN et BMNC soient égales.

Graphique de la question 5 du problème
(à rendre avec la copie)