∽ Brevet Europe du Nord juin 1980 ∾

Algèbre

Soit P et Q les applications polynômes définies dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcl}P(x) & = & 16x^2+8x+1-(4x+1)(3x+5),\\ Q(x) & = & (3x-1)^2-(x+2)^2.\end{array}$$

1. Développer, réduire et ordonner le polynôme $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

2. Factoriser les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sous la forme d'un produit de binômes du premier degré.

3. Calculer $P(0)$ et $Q\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = -4$.

5. Soit F la fonction rationnelle définie par p(x)

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F.

b. Montrer que, pour tout élément x de $\mathcal{D}$, $F(x)$ peut s'écrire

$$F(x) = \frac{x-4}{2x-3}.$$

c. Calculer $F\left(\sqrt{2}\right)$. (On rendra rationnel le dénominateur du quotient obtenu.)

6. Déterminer l'ensemble E des réels x pour lesquels

$$F(x) \geqslant 0.$$

GÉOMÉTRIE

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$
Pour la figure, on choisira comme unité de longueur 1 cm ; les représentants d'origine O des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont notés (O, I) et (O, J).
Soit A le point de (P) de coordonnées $(-3\ ;\ 0)$ et B le point (P) de coordonnées $(9 ; 0)$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 6.

1. **a.** Justifier que $\mathcal{C}$ et la droite (OJ) ont deux points communs.

b. Soit C le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et (OJ) dont l'ordonnée est positive.
Montrer que les coordonnées de C sont $\left(0\ ;\ 3\sqrt{3}\right)$.

c. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

2. Soit M le milieu du segment [A, B] et N sa projection orthogonale sur (BC).
   a. Démontrer que le triangle (A, M, C) est équilatéral.
   b. Démontrer que les points O, M, N et C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}'$ dont on déterminera le centre Q et le rayon r.
   c. Soit R le deuxième point d'intersection de (AC) et de $\mathscr{C}'$.

      Démontrer que R est le milieu de [A, C].
3. Quelle est la nature des quadruplets (M, N, C, R) et (O, Q, C, R) ? Justifier.