Brevet des collèges Grenoble juin 1974

ALGÈBRE

Des objets ont pour prix unitaire 80 centimes.
Le prix total exprimé en francs, de n de ces objets, que l'on désigne par $p(n)$, est établi de la façon suivante :
on calcule le produit $n \times 0,8$; le nombre décimal obtenu peut être envisagé comme somme d'un naturel, sa partie entière, et d'un décimal inférieur à 1, éventuellement nul, sa partie décimale; on décide que, dans le cas où cette partie décimale est inférieure à $\dfrac{1}{2}$, $p(n)$ est la partie entière de $n \times 0,8$ et que, dans les autres cas, $p(n)$ est cette partie entière augmentée de 1. (On dit que l'on a « arrondi » le nombre $n \times 0,8$.)
Ainsi on est en présence d'une application p, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui à tout naturel n associe $p(n)$.

1. Indiquer, dans un tableau, les images par p de naturels n tels que $1 \leqslant n \leqslant 15$ et donner, un repère étant choisi dans le plan, la représentation graphique de l'application p, en se limitant à ces valeurs de n.
2. Dans ce même repère, dessiner la demi-droite représentative de l'application q qui, à tout réel positif x, associe le nombre $x \times 0,8$.

   Quels sont les points de la représentation graphique de p qui appartiennent à cette demi-droite?
3. Le prix *total* de treize objets est-il la somme du prix *total* de six objets et du prix *total* de sept?

   a et b étant deux naturels, l'égalité $p(a+b) = p(a)+p(b)$ est-elle vraie quels que soient a et b?

   Ma dépense est-elle la même si j'achète vingt-quatre objets en quatre achats de six ou en un seul achat?

   Qu'en conclure pour les nombres $a \times p(b)$ et $p(ab)$?

   Les nombres $a \times p(b)$ et $b \times p(a)$ sont-ils égaux quels que soient a et b?

   On se contentera pour répondre à cette question de rédiger une phrase portant sur le cas où a est 4 et b est 6; cette phrase commencera par

   – « ma dépense est la même si... » ou par

   – « ma dépense n'est pas la même si... »

GÉOMÉTRIE

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer les points A de coordonnées (1 ; 3), B de coordonnées (4 ; -1) et C de coordonnées (-3 ; 0).

1. Calculer les coordonnées (ou les composantes) des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
3. Calculer les coordonnées du milieu, K du bipoint (C, B).

4. Calculer les coordonnées du point D défini par

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK}.$$

Les points A, B, C et D sont-ils sommets d'un parallélogramme ; d'un carré ?

5. Le cercle passant par les points A, B et C passe- t-il par D ?
Calculer le rayon de ce cercle.