Brevet des collèges Grenoble septembre1974

Exercice I

Soit f et g les applications de **R** vers **R** qui, à tout nombre réel x, associent les nombres réels $f(x)$ et $g(x)$ tels que

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ et } g(x) = 3x + 2.$$

1. Calculer les images par f des nombres

$$0, \quad 2, \quad 2\sqrt{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad 8.$$

2. Calculer le nombre f[g(2)] Le nombre réel x étant supposé connu, calculer le nombre réel $f[g(x)]$.
3. Soit u l'application de **R** vers **R** qui, à tout nombre réel x, associe le nombre réel $u(x)$ tel que

$$u(x) = (3x + 2)^2 - 4.$$

   Calculer x pour que son image par u soit 0.
4. Résoudre dans **R** l'équation

$$u(x) = -4.$$

Exercice II

Le plan affine (P) est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Construire les points A et B de (P) tels que

$$\overrightarrow{\text{OA}} = 2\overrightarrow{\imath} + 5\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et } \overrightarrow{\text{OB}} = -3\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}.$$

   Construire le point M symétrique de O par rapport au milieu, I, du bipoint (A, B).

   Calculer les coordonnées de M.
2. On désigne par f l'application de $(P) \times (P)$ vers (P) qui, à tout bipoint, associe le symétrique de O par rapport au milieu de ce bipoint.

   Ainsi, dans la question précédente, le point M est l'image de (A, B) par f et l'on écrit : M = f(A, B).

   Soit C et D les points de (P) tels que

$$\overrightarrow{\text{OC}} = 4\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et } \overrightarrow{\text{OD}} = -5\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath}.$$

   Démontrer que f(A, B) = f(C, D).

   L'application f est-elle une bijection ?

3. On donne le point N de coordonnées $(4\ ;\ -1)$ et le point E de coordonnées $(3\,;\,2)$.
Construire le point F tel que $f(\text{E, F}) = \text{N}$.
Calculer les coordonnées de F.

4. Dans ce qui suit, le plan affine (P) est euclidien et le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est orthonormé.
On donne les points R de coordonnées $(6\ ;\ -3)$, S de coordonnées $(2\,;\,4)$ et K tel que $\text{K} = f(\text{R, S})$.
Les points O, R, K et S sont-ils les sommets d'un rectangle ?
Soit (T, U) un bipoint tel que $f(\text{T, U}) = \text{K}$ et tel que (O, T, K, U) est un rectangle.
Qu'en conclut-on pour les points T et U ?
Préciser les positions de T et U pour lesquelles (O, T, K, U) est un carré .