∽ Brevet Lille juin 1976 ∾

Algèbre

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (3x-5)^2 - (x+2)^2.$$

a. Factoriser $f(x)$.

b. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant le puissances décroissantes de x.

c. Calculer successivement $f(0)$, $\quad f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(2\sqrt{3}\right)$.

d. Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, montrer que

$$-1 < f\left(2\sqrt{3}\right) < 0.$$

2. Soit h la fonction rationnelle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{f(x)}{2x-7}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de h, puis simplifier $h(x)$.

3. Soit la fonction affine $g : x \longmapsto ax+b$, où a et b sont des réels.
Déterminer a et b sachant que $g(1) = 1$ et $g(2) = 5$.
Écrire alors $g(x)$.

4. g et h sont-elles égales?
Construire leurs représentations graphiques dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Géométrie

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on donne les points

$$\text{A}\left(0\,;\,\frac{5}{2}\right), \qquad \text{B}(-2\,;\,1) \quad \text{et} \quad \text{C}\left(3\,;\,\frac{-3}{2}\right).$$

1. Montrer que les points B, O et C sont alignés.

2. Déterminer les coordonnées (ou composantes) des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.
En déduire que les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

3. Soit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle dont le centre est B et qui passe par A, soit $(\mathcal{C}_2)$ le cercle dont le centre est C et qui passe par A.
Ces deux cercles se coupent en A et E.
On désigne par H l'intersection des droites (BC) et (AE).
Montrer que H est le milieu de [AE].

4. Calculer d(A, B) et d(A, O).
   En déduire que H est le milieu de [OB].
   Préciser alors la nature du quadruplet (A, O, E, B).
5. Expliquer pourquoi les triangles (B, A, C) et (B, E, C) sont isométriques, puis indiquer quelle est l'isométrie qui transforme le triangle (B, A, C) en le triangle (B, E, C).
6. Soit α l'écart angulaire en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\text{ACB}}$.
   Déterminer $\tan\widehat{\text{ACB}}$.
   En déduire la valeur approchée par défaut à un degré près de α.