✾ Brevet Lille juin 1977 ✾

Algèbre

On considère les fonctions numériques f et g définies par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (2x+3)(x-1) + 2x^2 + 3x \\ g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = (x+2)(11-x) \end{array}$$

1. **a.** Montrer que f et g sont des fonctions polynômes de degré 2.
   b. Factoriser $f(x)$.
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

2. Calculer $f(0)$; $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$; $f\left(\sqrt{3}\right)$; $g(0)$; $g(11)$; $g\left(-\sqrt{3}\right)$.

3. Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donner un encadrement de $g\left(-\sqrt{3}\right)$. à 0,1 près.

4. On pose $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de q ? Donner une forme simplifiée de $q(x)$ pour tout x appartenant à $\mathcal{D}$.

5. Soit $q'(x) = \dfrac{4x+6}{11-x}$.
Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ a-t-on $q(x) = q'(x)$?
Résoudre les équations $q'(x) = 0$ et $q'(x) = 1$.

6. Tracer dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = 4x + 6$ et $y = 11 - x$.
Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de (D) et (D').
Pouvait-on, à l'aide de ce qui précède, prévoir ce résultat ?

Géométrie

1. Un segment [A, B] d'un plan euclidien mesure 3 cm.
On appelle D la perpendiculaire en A à la droite (AB).
Montrer que le cercle C de centre B et de rayon 6 cm coupe D en deux points.
Soit C l'un de ces deux points.
Trouver la mesure en centimètres du segment [A, C].
On désigne par M le milieu du segment [B, C].
Montrer que le triangle (A, B, M) est équilatéral.

2. Soit I le point symétrique de A par rapport à M.
Donner la nature du quadruplet (A, B, I, C) et celle du triangle (M, C, I).

3. On appelle Δ la médiatrice du segment [BC], et I$'$ l'image du point I dans la symétrie orthogonale d'axe Δ.
Nommer les points de la figure par lesquels passe le cercle $\mathcal{C}'$ de centre M et de rayon 3 cm. Justifier votre réponse.

4. Montrer que les segments [A, C], [B, I] et [C, I$'$] sont isométriques.
Montrer que les droites (BI) et (CI$'$) se coupent en un point de Δ.
Calculer l'écart angulaire, en degré, de l'angle géométrique $\widehat{\text{CBI}'}$.
5. Donner les coordonnées des points B, C, I et M dans le repère $\left(\text{A},\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.