∽ Brevet Lille juin 1979 ∾

Algèbre

Soit A et B deux applications polynômes définies, dans $\mathbb{R}$, par

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & 4(4x-1)^2 - 9(2x+1)^2, \\ B(x) & = & 196x^2 + 28x + 1 - (14x+1)(13x-2). \end{array}$$

1. Écrire $A(x)$ et $B(x)$ sous la forme de produits de fonctions polynômes du premier degré.

2. Soit F la fonction rationnelle définie, dans $\mathbb{R}$, par

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition Δ de F.

   b. Montrer que pour x, élément de Δ, on a

$$F(x) = \frac{2x-5}{x+3}.$$

   c. Calculer les images par F des réels suivants :

$$-\frac{7}{2}, \qquad \sqrt{2}-2.$$

   (Rendre rationnel le dénominateur.)

3. De quel élément, de $\mathbb{R}$, 1 est-il l'image par F ?

4. Déterminer l'ensemble E des nombres réels tels que $F(x) \leqslant 0$.

5. Représenter graphiquement les fonctions affines f et g définies par

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2x-5, \\ g(x) & = & x+3. \end{array}$$

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des droites représentatives de ces fonctions ?

Comparer l'abscisse de ce point au résultat de la question 3. Justifier.

Géométrie

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [A, B] tel que $d(\text{A, B}) = 5$.
Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que

$$d(\text{A, M}) = 2,5.$$

1. Faire une figure en prenant comme unité le centimètre.

2. Quelle est la nature du triangle (A, M, B) ?
   Calculer d(M, B).
3. Soit P le point du plan tel que AM = MP.
   Montrer que la droite (MB) est la médiatrice du segment [A, P].
   Montrer que (A, B, P) est un triangle équilatéral.
4. Soit P′ le projeté orthogonal de P sur la droite (AB).
   Montrer que P′ est le centre de $\mathscr{C}$.
5. Soit (Δ) la droite perpendiculaire en P à la droite (AP).
   On pose : (AB) $\cap$(Δ) = {H}.
   Montrer que B est le milieu de [A, H]. Calculer d(P, H).
6. On appelle $\mathscr{C}'$ le cercle de centre B et qui a pour rayon d(A, B).
   Montrer que H et P appartiennent au cercle $\mathscr{C}'$,
7. Soit N un point quelconque du cercle (on choisira N distinct de A et de B). La droite (AN) a un deuxième point commun avec $\mathscr{C}'$ que l'on appelle Q.
   Montrer que N est le milieu de [A, Q].