Brevet des collèges Lille septembre 1970 [1]

ALGÈBRE

Soit $P(x) = 3x - 5x^2 - 3x^3 + 5$.

1. Décomposer $P(x)$ en un produit de polynômes du premier degré.
   Vérifier l'exactitude du résultat obtenu, en calculant les valeurs numériques de $P(x)$ et du produit trouvé pour $x = 0$, puis pour $x = \sqrt{2}$.
2. On pose
   .
   $$F(x) = \frac{P(x)}{2 - 2x^2}.$$
   Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ n'est pas définie.
   Simplifier F(x) ; on obtient une expression algébrique $f(x)$.
3. Étudier la variation de la fonction $y = f(x)$, pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$
   Tracer la ligne $(\mathcal{L})$ qui représente les variations de cette fonction.
4. Soit A le point de $(\mathcal{L})$ qui a pour ordonnée -4.
   Lire une valeur approchée, à 0,1 près, de son abscisse ; calculer ensuite la valeur de x pour laquelle $f(x) = -4$.
5. Résoudre le système d'inéquations
   $$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & < & 0,\\ f(x) & > & -4.\end{array}\right.$$
   Vérifier sur le graphique les résultats obtenus.

GÉOMÉTRIE

On donne un demi-cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, de rayon R, limité par le diamètre [AB].
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C})$; la tangente en M à $(\mathcal{C})$ coupe respectivement en E et en F les tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et en B.

1. Comparer les triangles OAE et OBF ; en déduire la valeur du produit AE × BF en fonction de R.
2. Soit H la projection orthogonale de M sur AB.
   AE ME Comparer les rapports $\dfrac{\text{HA}}{\text{HB}}$ et $\dfrac{\text{AE}}{\text{BF}}$ au rapport $\dfrac{\text{ME}}{\text{MF}}$.
   En déduire que les triangles AHE et BHF sont semblables et que HM est la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{EHF}}$.

1. Amiens

3. La droite (ME) coupe, en général, la droite (AB) en P.
Pour quelle position de M cela ne se produit-il pas ?
Dans la suite, on supposera que M n'est pas en ce point.
Démontrer que les points M et P partagent le segment [EF] dans le rapport $\dfrac{\text{HA}}{\text{HB}}$.

4. Dans le cas particulier où l'angle $\widehat{\text{AOM}}$ est égal à 45°, calculer OH, PA et $\dfrac{\text{HA}}{\text{HB}}$.